

Úvod do teorie grup: Cvičení 3

18. října 2021

1. Spočtěte $\text{Aut}(\mathbb{Z})$.
2. Dokažte, že pokud je grupa G abelovská, tak je grupa vnitřních automorfismů $\text{Inn}(G)$ triviální.
3. Přímo z definice centra grupy dokažte, že $Z(G) \trianglelefteq G$.
4. Spočtěte $Z(Q_8)$ a $Z(D_{2n})$.
5. Pro libovolné grupy G, H ověřte, že semidirektní součin $G \rtimes_{\varphi} H$ je skutečně grupa.
6. Ukažte, že grupa $N \times 1$ je normální podgrupou $N \rtimes K$.
7. Dokažte, že $\text{Aut}(\mathbb{Z}_p^k) \cong GL_k(\mathbb{Z}_p)$.
8. Dokažte, že pokud je G neabelovská, tak $G/Z(G)$ není cyklická grupa.

Další příklady:

9. Dokažte, že $Z(S_n) = Z(A_n) = 1$. Co to říká o grupách vnitřních automorfismů?
10. Ukažte, že pokud $Z(G) = 1$, tak už nutně $Z(\text{Aut}(G)) = 1$.
11. Buď G, H konečné grupy takové, že $\text{NSD}(|G|, |H|) = 1$. Dokažte, že $\text{Aut}(G \times H) \cong \text{Aut}(G) \times \text{Aut}(H)$.
12. Popište grupu $\text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$.
13. Pro těleso T spočtěte $Z(GL_n(T))$.
- * 14. Ukažte, že $\text{Aut}(D_8) \cong D_8$ a $\text{Aut}(D_{16}) \not\cong D_{16}$.
- * 15. Ukažte, že $\text{Aut}(Q_8) \cong S_4$.
16. Spočtěte velikost $|\text{Aut}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2)|$ v závislosti na n .
- * 17. Dokažte, že $\text{Aut}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \cong D_8$, $\text{Aut}(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2) \cong D_{12}$, zatímco $\text{Aut}(\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2) \cong D_8 \times \mathbb{Z}_2$

Hinty:

Obecně: automorfismy zachovávají řády prvků.

8. Postupujte sporem. Jakého tvaru jsou prvky G (použitím generátoru cyklické faktorgrupy)?

10. Dva automorfismy komutují právě tehdy, když komutují obrazy každých dvou prvků.

15. Možný geometrický náhled: označte si stěny krychle prvky $Q_8 \setminus \{\pm 1\}$, tak aby pořadí stěn okolo každého vrcholu odpovídalo násobení v Q_8 . Ukažte, že $\text{Aut}(Q_8)$ odpovídá přesně rotačním symetriím krychle (na ty se lze dívat jako na permutace hlavních diagonál).

16. Výsledek záleží na zbytku po dělení 4. Generátory se musí zobrazit na prvky správného řádu a zároveň jimi generované podgrupy musí mít triviální průnik.