Lineární nezávislost druhých odmocnin

Pro těleso $\mathbf{T}$ charakteristiky různé od 2 fixujme jeho algebraický uzávěr $\mathbf{S}$. Pro $a \in T$ ať $\sqrt{a} \in S$ značí nějaký kořen polynomu $x^2 - a \in T[x]$.

Lemma 0.1. *Buď* $\mathbf{L} \leq \mathbf{S}$, $a, b \in L$ *takové, že* $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{ab} \notin L$. *Potom* $[\mathbf{L}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) : \mathbf{L}] = 4$.

Důkaz. Elementární ověření. $\square$

Tvrzení 0.2. *Buď* $\mathbf{T}$ *těleso charakteristiky různé od* 2, $n \in \mathbb{N}$ *a* $M = \{\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n}\}$ *taková množina, že* $(\forall i) a_i \in T$ *a pro libovolnou neprázdnou* $F \subseteq \{1, \dots, n\}$ *platí, že* $\prod_{k \in F} \sqrt{a_k} \notin T$. *Potom* $[\mathbf{T}(M) : \mathbf{T}] = 2^n$.

Důkaz. Indukcí dle n. Pro $n = 1$ je to triviální a pro $n = 2$ užijeme Lemma. Ať $n > 2$. Označme $\mathbf{L} = \mathbf{T}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_{n-2}})$. Pak z IP víme, že $[\mathbf{L} : \mathbf{T}] = 2^{n-2}$. Stačí tedy dokázat, že $[\mathbf{T}(M) : \mathbf{L}] = 4$. Dle Lemmatu k tomu stačí vědět, že $\sqrt{a_{n-1}}, \sqrt{a_n}, \sqrt{a_{n-1}a_n} \notin L$. To ovšem víme z IP pro $n - 1$, které dává $[\mathbf{L}(\sqrt{a_{n-1}}) : \mathbf{T}] = 2^{n-1}$ a podobně pro zbylé dvě odmocniny. $\square$