
Grupy

9 Pojem grupy**9.1 Základní vlastnosti permutací**

1. Buď π, σ permutace zadané předpisy $\pi(1) = 3, \pi(2) = 6, \pi(3) = 4, \pi(4) = 1, \pi(5) = 5, \pi(6) = 2$ a $\sigma(1) = 4, \sigma(2) = 5, \sigma(3) = 3, \sigma(4) = 1, \sigma(5) = 2, \sigma(6) = 6$. Rozložte tyto permutace na cykly, spočítejte složení $\pi \circ \sigma$ a $\sigma \circ \pi$, mocninu π^{1111} a konjugovanou permutaci $\rho \circ \pi \circ \rho^{-1}$, kde $\rho = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$. Spočítejte znaménka všech těchto permutací. [$\pi = (1\ 3\ 4)(2\ 6), \sigma = (1\ 4)(2\ 5), \pi \circ \sigma = (3\ 4)(5\ 6\ 2), \sigma \circ \pi = (1\ 3)(2\ 6\ 5), \pi^{1111} = (1\ 3\ 4)(2\ 6), \rho \circ \pi \circ \rho^{-1} = (2\ 4\ 5)(3\ 1)$, znaménka po řadě: $-1, 1, -1, -1, -1, -1$]
2. Najděte všechny permutace na $\{1, 2, 3, 4\}$, podle kterých je $(1\ 2\ 3)$ konjugovaná s $(1\ 2\ 4)$. [$\{(3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)\}$]

9.2 Definice a příklady grup

1. Rozhodněte, zda existuje unární operace $'$ a prvek e tak, aby následující čtveřice byla grupou:

- (a) $(\mathbb{Z}, -, ', e)$ [ne, není asoc]
- (b) $(\mathbb{Z}, *, ', e)$ kde $a * b = a + (-1)^a b$. [ano]
- (c) $(\mathbb{Q}, *, ', e)$ kde $a * b = |a \cdot b|$. [ne, nemá inverz]
- (d) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *, ', e)$ kde $a * b = a \cdot b$ pro $a > 0$ a $a * b = \frac{a}{b}$ pro $a < 0$. [ano]
- (e) $(P(X), \cap, ', e)$, resp. $(P(X), *, ', e)$, kde $P(X)$ značí množinu všech podmnožin množiny X a $*$ značí symetrickou diferenci, tj. $A * B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. [průnik ne, sym. difference ano]

2. Rozhodněte, zda (a) $\{\pi \in A_4 : \pi^2 = 1\}$, (b) $\{\pi \in A_4 : \pi^3 = 1\}$ tvoří podgrupu grupy A_4 . Vyřešte analogickou úlohu pro grupu S_4 . [ano, ne, ne, ne]

3. Určete, v kterých z následujících grup tvoří sudá čísla podgrupu: $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{15}, \mathbb{Z}_{16}, \mathbb{Z}_{15}^*, \mathbb{Z}_{16}^*$. [ano, ne, ano, ne, ne]

4. Dokažte, že $\mathbb{C}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ a $\mathbb{C}_p^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}_{p^n}$ tvoří podgrupy grupy \mathbb{C}^* . [Rozepsáním na argument a velikost.]

5. Buď H, K podgrupy grupy G . Tvoří průnik $H \cap K$, resp. sjednocení $H \cup K$, podgrupu grupy G ? [ano, ne]

9.3 Mocniny a řád prvku

1. Spočítejte řád prvku 7 v grupách $\mathbb{Z}_{15}, \mathbb{Z}_{15}^*, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^*$. [15, 4, ∞ , ∞]
2. Najděte všechny prvky konečného řádu v grupě \mathbb{C}^* . [$\{e^{2\pi i q}, q \in \mathbb{Q}\}$]
3. Existují v grupách S_6 a S_7 prvky řádů 9, 10, 11, či 12? [S_6 : ne, ne, ne, ne; S_7 : ne, ano, ne, ano]