Algebra 22/23: 9. cvičení — skupina Ježil

Grupy

9 Pojem grupy

9.1 Základní vlastnosti permutací

1. Buď π, σ permutace zadané předpisy $\pi(1) = 3$, $\pi(2) = 6$, $\pi(3) = 4$, $\pi(4) = 1$, $\pi(5) = 5$, $\pi(6) = 2$ a $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 5$, $\sigma(3) = 3$, $\sigma(4) = 1$, $\sigma(5) = 2$, $\sigma(6) = 6$. Rozložte tyto permutace na cykly, spočtěte složení $\pi \circ \sigma$ a $\sigma \circ \pi$, mocninu π^{1111} a konjugovanou permutaci $\rho \circ \pi \circ \rho^{-1}$, kde $\rho = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$. Spočtěte znaménka všech těchto permutací.

2. Najděte všechny permutace na {1,2,3,4}, podle kterých je (1 2 3) konjugovaná s (1 2 4).

9.2 Definice a příklady grup

1. Rozhodněte, zda existuje unární operace $'$ a prvek e tak, aby následující čtveřice byla grupou:

(a) $(\mathbb{Z}, -, ', e)$

(b) $(\mathbb{Z}, *, ', e)$ kde $a * b = a + (-1)^a b$.

(c) $(\mathbb{Q}, *, ', e)$ kde $a * b = |a \cdot b|$.

(d) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *, ', e)$ kde $a * b = a \cdot b$ pro $a > 0$ a $a * b = \frac{a}{b}$ pro $a < 0$.

(e) $(P(X), \cap, ', e)$, resp. $(P(X), *, ', e)$, kde $P(X)$ značí množinu všech podmnožin množiny X a $*$ značí symetrickou diferenci, tj. $A * B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

2. Rozhodněte, zda (a) $\{\pi \in A_4 : \pi^2 = 1\}$, (b) $\{\pi \in A_4 : \pi^3 = 1\}$ tvoří podgrupu grupy $\mathbf{A}_4$. Vyřešte analogickou úlohu pro grupu $\mathbf{S}_4$.

3. Určete, v kterých z následujících grup tvoří sudá čísla podgrupu: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}_{16}$, $\mathbb{Z}_{15}^*$, $\mathbb{Z}_{16}^*$.

4. Dokažte, že $\mathbb{C}_n = \{z \in \mathbb{C} :\ z^n = 1\}$ a $\mathbb{C}_{p^\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}_{p^k}$ tvoří podgrupy grupy $\mathbb{C}^*$.

5. Buď $\mathbf{H}, \mathbf{K}$ podgrupy grupy $\mathbf{G}$. Tvoří průnik $H \cap K$, resp. sjednocení $H \cup K$, podgrupu grupy $\mathbf{G}$?

9.3 Mocniny a řád prvku

1. Spočtěte řád prvku 7 v grupách $\mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}_{15}^*$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^*$.

2. Najděte všechny prvky konečného řádu v grupě $\mathbb{C}^*$.

3. Existují v grupách $\mathbf{S}_6$ a $\mathbf{S}_7$ prvky řádů 9, 10, 11, či 12?