Algebra 22/23: 8. cvičení — skupina Ježil

Algebra polynomů

8 Konečná tělesa, symetrické polynomy

8.1 Z minula

1. V okruhu $\mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^4+\alpha^3+\alpha+2)$ najděte prvek, který nemá inverz. [(α^2+1)]

2. Zadefinujte zobrazení mezi $\mathbb{Q}[\alpha]/(\alpha^3-2)$ a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, o kterém máte pocit, že by mělo být izomorfismus. Co musíte ověřit, abyste dokázali, že to doopravdy izomorfismus je? [α se chová jako $\sqrt[3]{2}$]

8.2 Konečná tělesa

1. Napište tabulky operací čtyřprvkového tělesa. [Sčítání z toho, že to je v.p. nad $\mathbb{Z}_2$, násobení 0, a 1 jasné, $x^2=x \implies x=1$, jinak pokračovat jako sudoku.]

2. V tělese $\mathbb{Z}_5[\alpha]/(\alpha^3+\alpha+1)$ spočtěte

(a) $(3\alpha^2+4\alpha+1)+(2\alpha^2+4)$, [$4\alpha$]

(b) $(3\alpha^2+4\alpha+1)\cdot(2\alpha^2+4)$, [$3\alpha^2+2\alpha+1$]

(c) $(2\alpha^2+4)^{-1}$, [$4\alpha^2+4\alpha+1$]

(d) řešení lineární rovnice $\alpha\cdot x+(\alpha+1)=\alpha^2$. [$x=\alpha^2+\alpha$]

3. V tělese $\mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^2+\alpha+1)$ spočtěte řešení soustavy linárních rovnic zadané maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 1 & \alpha+1 \\ \alpha+1 & \alpha+1 & \alpha \end{array}\right)$$

[$y=0, x=\alpha$]

4. Dokažte, že v tělese $\mathbf{T}=\mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^2+1)$ najděte prvek u s vlastností, že každý nenulový prvek tělesa $\mathbf{T}$ lze napsat jako mocnina u. Napište ireducibilní rozklad polynomu x^8-1 v $\mathbf{T}[x]$. [Např. $(\alpha+1)$; Rozklad je potom na součin všech lineárních polynomů $x-\beta$, kde β je nenulový prvek tělesa.]

5. Buď $\mathbf{T}=\mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^4+\alpha^3+1)$. Najděte ireducibilní rozklad polynomu x^3-1 v $\mathbf{T}[x]$. [$(x+1)(x+\alpha^3+\alpha)(x+\alpha^3+\alpha+1)$]

6. Popište rozkladové nadtěleso polynomu (a) x^2+x+1 nad $\mathbb{Z}_2$, (b) x^4-1 nad $\mathbb{Z}_3$. [$\mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^2+\alpha+1)$, $\mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^2+1)$]

8.3 Symetrické polynomy a Viètovy vztahy

1. Je následující polynom symetrický?

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$$

[Ano, stačí vyzkoušet všechny transpozice.]

2. Vyjádřete následující symetrické polynomy jako součet součinů elementárních symetrických polynomů:

$$3x^2yz + 3xy^2z + 3xyz^2, \qquad x^3(y+z) + y^3(x+z) + z^3(x+y).$$

[$3s_1s_2$, $3s_1^2s_3 - s_1^2s_2 - s_1s_3$]

3. Buď $\mathbf{T}$ těleso a $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ polynom z $\mathbf{T}[x]$ a $u_1, \ldots, u_n$ všechny jeho kořeny v nějakém nadtělese. Vyjádřete součet třetích mocnin jeho kořenů $u_1^3 + \ldots + u_n^3$ pomocí koeficientů $a_0, \ldots, a_{n-1}$. [$-\frac{a_{n-1}^2}{a_n^3} + 3\frac{a_{n-1}a_{n-2}}{a_n^2} - 3\frac{a_{n-3}}{a_n}$]