Algebra 22/23: 7. cvičení — skupina Ježil

Abstraktní teorie dělitelnosti

---

7 Polynomy nad Gaussovskými obory, počítání modulo polynom, Čínská věta o zbytcích a interpolace

7.1 Gaussova věta

Tvrzení 7.1 (NSD a ireducibilita v oboru vs. podílovém tělese)**.** *Buď* $\mathbf{R}$ *gaussovský obor,* $\mathbf{Q}$ *jeho podílové těleso a* f, g *polynomy z* $\mathbf{R}[x]$*. Pak*

1. $\mathrm{NSD}_{\mathbf{R}[x]}(f,g)$ *existuje a je roven součinu* $c \cdot h$*, kde* $c = \mathrm{NSD}_{\mathbf{R}}(\mathrm{c}(f), \mathrm{c}(g))$ *a* h *je primitivní polynom z* $\mathbf{R}[x]$ *splňující* $h = \mathrm{NSD}_{\mathbf{Q}[x]}(\mathrm{pp}(f), \mathrm{pp}(g))$*.*

2. f *je ireducibilní v* $\mathbf{R}[x]$ *právě tehdy, když*
   - $\deg f = 0$ *a* f *je ireducibilní v* $\mathbf{R}$*; nebo*
   - $\deg f > 0$*,* f *je primitivní a ireducibilní v* $\mathbf{Q}[x]$*.*

1. Najděte ireducibilní rozklad polynomů $x^2 - y + 2$, $x^2 - 2y^2$, $x^2 + y^2$, $x^2 - y^3$, $x^2 + xy + y - 1$ a $2y^3 + y^2x + yx^2 + x^2 + 7y^2 + 7y - x + 2$ v oborech $\mathbb{Q}[x,y]$, $\mathbb{R}[x,y]$ a $\mathbb{C}[x,y]$. Argumentujte pečlivě pomocí tvrzení 7.1.

2. Spočtěte $\mathrm{NSD}(6x^2y, 15xy^2 + 21x^3y)$ v oboru $\mathbb{Z}[x,y]$.

7.2 Racionální kořeny a Eisensteinovo kritérium

1. Napište všechny racionální kořeny polynomu $2x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 3$.

2. Jsou polynomy $2x^3 + 4$ a $x^3 + 4x - 2$ ireducibilní v $\mathbb{Z}[x]$? A co $x^5 - 36x^4 + 6x^3 + 30x^2 + 3$ v $\mathbb{Q}[x]$?

3. Pomocí substituce dokažte, že jsou polynomy $x^6 + x^3 + 1$ a $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + x^2 - 13x - 5$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[x]$.

7.3 Čínská věta o zbytcích a interpolace

1. Najděte všechny polynomy $f \in \mathbb{Q}[x]$ stupně < 3 splňující $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 2$.

2. Najděte všechny polynomy $f \in \mathbb{Q}[x]$ stupně < 3 splňující $f \equiv x + 1 \pmod{x^2 + 1}$ a $f(0) = 3$.

3. Najděte polynom $f \in \mathbb{Z}_5[x]$ co nejmenšího stupně splňující

$$f \equiv x + 1 \pmod{x^2 + 1}$$
$$f \equiv x \pmod{x^3 + 1}.$$

4. V okruhu $\mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha + 2)$ najděte prvek, který nemá inverz.

5. Dokažte, že je těleso $\mathbb{Q}[\alpha]/(\alpha^3 - 2)$ izomorfní tělesu $\mathbb{Q}(\sqrt[2]{3})$.