Algebra 22/23: 6. cvičení — skupina Ježil

Abstraktní teorie dělitelnosti

6 Existence a jednoznačnost ireducibilních rozkladů, eukleidův algoritmus a Bézoutova rovnost, polynomy nad Gaussovskými obory

6.1 Gaussovské obory

1. V $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ platí

$$4 = 2^2 = (1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3}).$$

V $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ platí

$$2 = \sqrt{2}^2 = (4+3\sqrt{2})(-4+3\sqrt{2}).$$

Co z toho plyne pro gaussovskost těchto oborů? [Není gaussovský, různé rozklady; Nic, $\sqrt{2} \| 4+3\sqrt{2}$]

2. Najděte v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ireducibilní prvek, který není prvočinitelem. Najděte tam nějaký prvek, který má dva různé rozklady. Najděte tam dvojici prvků, která nemá NSD. [$(1+\sqrt{-5})$, 6, $((1+\sqrt{-5}), 3(1-\sqrt{-5}))$]

3. Buď $\mathbf{R}$ gaussovský obor a $a, b \in R$ taková, že $a^2 = b^3$. Dokažte, že $a \parallel c^3$ a $b \parallel d^2$ pro nějaké prvky $c, d \in R$. [Rozepsat jak budou vypadat ired. rozklady.]

6.2 Obory hlavních ideálů

1. Najděte v oboru $\mathbb{Z}$ generátory následujících ideálů: $15\mathbb{Z}+24\mathbb{Z}$, $15\mathbb{Z} \cap 24\mathbb{Z}$, $(100\mathbb{Z}+60\mathbb{Z}+16\mathbb{Z}) \cap 21\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z}$. [3, 120, 252]

2. Buď $\mathbf{R}$ obor hlavních ideálů. Dokažte, že $aR \cap bR = cR$, kde c je nejmenší společný násobek prvků a, b. [Rozepsat ired. rozklady.]

3. Buď $\mathbf{R}$ komutativní okruh. Dokažte, že $\mathbf{R}$ je těleso právě tehdy, když má pouze nevlastní ideály. (*Návod:* asociované prvky určují stejné hlavní ideály.)

6.3 Gaussova věta

Tvrzení 6.1 (NSD a ireducibilita v oboru vs. podílovém tělese)**.** *Buď* $\mathbf{R}$ *gaussovský obor,* $\mathbf{Q}$ *jeho podílové těleso a* f, g *polynomy z* $\mathbf{R}[x]$*. Pak*

1. $\mathrm{NSD}_{\mathbf{R}[x]}(f,g)$ *existuje a je roven součinu* $c \cdot h$*, kde* $c = \mathrm{NSD}_{\mathbf{R}}(\mathrm{c}(f), \mathrm{c}(g))$ *a* h *je primitivní polynom z* $\mathbf{R}[x]$ *splňující* $h = \mathrm{NSD}_{\mathbf{Q}[x]}(\mathrm{pp}(f), \mathrm{pp}(g))$*.*
2. f *je ireducibilní v* $\mathbf{R}[x]$ *právě tehdy, když*
   - $\deg f = 0$ *a* f *je ireducibilní v* $\mathbf{R}$*; nebo*

- $\deg f > 0$, f *je primitivní a ireducibilní v* $\mathbf{Q}[x]$.

1. Najděte ireducibilní rozklad polynomů $x^2 - y + 2$, $x^2 - 2y^2$, $x^2 + y^2$, $x^2 - y^3$, $x^2 + xy + y - 1$ a $2y^3 + y^2x + yx^2 + x^2 + 7y^2 + 7y - x + 2$ v oborech $\mathbb{Q}[x, y]$, $\mathbb{R}[x, y]$ a $\mathbb{C}[x, y]$. Argumentujte pečlivě pomocí tvrzení 6.1. [V $\mathbb{C}[x, y]$: ired., $(x - i\sqrt{2}y)(x + i\sqrt{2}y)$,$(x - iy)(x + iy)$, ired., ired.]

2. Spočtěte $\mathrm{NSD}(6x^2y, 15xy^2 + 21x^3y)$ v oboru $\mathbb{Z}[x, y]$. [$3xy$]

6.4 Racionální kořeny a Eisensteinovo kritérium

1. Napište všechny racionální kořeny polynomu $2x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 3$. [$\{-1\}$]

2. Jsou polynomy $2x^3 + 4$ a $x^3 + 4x - 2$ ireducibilní v $\mathbb{Z}[x]$? A co $x^5 - 36x^4 + 6x^3 + 30x^2 + 3$ v $\mathbb{Q}[x]$? [ne, ano, ne]

3. Pomocí substituce dokažte, že jsou polynomy $x^6 + x^3 + 1$ a $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + x^2 - 13x - 5$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[x]$. [substituce $x + 1$, substituce $x - 1$]