
 Abstraktní teorie dělitelnosti

6 Existence a jednoznačnost ireducibilních rozkladů, eukleidův algoritmus a Bézoutova rovnost, polynomy nad Gaussovskými obory

6.1 Gaussovské obory

1. V $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ platí

$$4 = 2^2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3}).$$

V $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ platí

$$2 = \sqrt{2}^2 = (4 + 3\sqrt{2})(-4 + 3\sqrt{2}).$$

Co z toho plyne pro gaussovskost těchto oborů?

2. Najděte v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ireducibilní prvek, který není prvočinitelem. Najděte tam nějaký prvek, který má dva různé rozklady. Najděte tam dvojici prvků, která nemá NSD.

3. Buď \mathbf{R} gaussovský obor a $a, b \in R$ taková, že $a^2 = b^3$. Dokažte, že $a \parallel c^3$ a $b \parallel d^2$ pro nějaké prvky $c, d \in R$.

6.2 Obory hlavních ideálů

1. Najděte v oboru \mathbb{Z} generátory následujících ideálů: $15\mathbb{Z} + 24\mathbb{Z}$, $15\mathbb{Z} \cap 24\mathbb{Z}$, $(100\mathbb{Z} + 60\mathbb{Z} + 16\mathbb{Z}) \cap 21\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z}$.

2. Buď \mathbf{R} obor hlavních ideálů. Dokažte, že $aR \cap bR = cR$, kde c je nejmenší společný násobek prvků a, b .

3. Buď \mathbf{R} komutativní okruh. Dokažte, že \mathbf{R} je těleso právě tehdy, když má pouze nevlastní ideály. (*Návod:* asociované prvky určují stejné hlavní ideály.)

6.3 Gaussova věta

Tvrzení 6.1 (NSD a ireducibilita v oboru vs. podílovém tělese). *Buď \mathbf{R} gaussovský obor, \mathbf{Q} jeho podílové těleso a f, g polynomy z $\mathbf{R}[x]$. Pak*

1. $\text{NSD}_{\mathbf{R}[x]}(f, g)$ existuje a je roven součinu $c \cdot h$, kde $c = \text{NSD}_{\mathbf{R}}(c(f), c(g))$ a h je primitivní polynom z $\mathbf{R}[x]$ splňující $h = \text{NSD}_{\mathbf{Q}[x]}(\text{pp}(f), \text{pp}(g))$.

2. f je ireducibilní v $\mathbf{R}[x]$ právě tehdy, když

- $\deg f = 0$ a f je ireducibilní v \mathbf{R} ; nebo
- $\deg f > 0$, f je primitivní a ireducibilní v $\mathbf{Q}[x]$.

1. Najděte ireducibilní rozklad polynomů $x^2 - y + 2$, $x^2 - 2y^2$, $x^2 + y^2$, $x^2 - y^3$, $x^2 + xy + y - 1$ a $2y^3 + y^2x + yx^2 + x^2 + 7y^2 + 7y - x + 2$ v oborech $\mathbb{Q}[x, y]$, $\mathbb{R}[x, y]$ a $\mathbb{C}[x, y]$. Argumentujte pečlivě pomocí tvrzení 6.1.

2. Spočtete NSD($6x^2y, 15xy^2 + 21x^3y$) v oboru $\mathbb{Z}[x, y]$.

6.4 Racionální kořeny a Eisensteinovo kritérium

1. Napište všechny racionální kořeny polynomu $2x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 3$.
2. Jsou polynomy $2x^3 + 4$ a $x^3 + 4x - 2$ ireducibilní v $\mathbb{Z}[x]$? A co $x^5 - 36x^4 + 6x^3 + 30x^2 + 3$ v $\mathbb{Q}[x]$?
3. Pomocí substituce dokažte, že jsou polynomy $x^6 + x^3 + 1$ a $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + x^2 - 13x - 5$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[x]$.