

Abstraktní teorie dělitelnosti

5 Základní pojmy

5.1 Největší společný dělitel

1. Spočtěte $\text{NSD}(5 + 7i, 3 - i)$, $\text{NSD}(6 - 7i, 7 + i)$, $\text{NSD}(8 + 5i, 4 + i)$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$. (Pomocí normy to bude jednodušší než pomocí Eukleidova algoritmu.)
2. Spočtěte $\text{NSD}(6 - 3\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$ v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

5.2 Ireducibilní prvky a rozklady

1. Najděte ireducibilní rozklad polynomů $x^3 - 2$ a $x^4 - x^2 - 2$ v oborech $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$ a $\mathbb{Z}_5[x]$.
2. Najděte ireducibilní rozklad polynomů $2x^2 + 2$ a $x^3 - 2$ v oborech $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}[i][x]$, $\mathbb{R}[x]$ a $\mathbb{C}[x]$.
3. Najděte ireducibilní rozklad polynomu $2x^2 + 2x + 3$ v oborech $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})[x]$ a $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}][x]$.
4. Dokažte, že všechny ireducibilní polynomy v $\mathbb{R}[x]$ mají stupeň ≤ 2 .
5. Rozhodněte, zda je polynom $x^4 + x^2 + 1$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}_5[x]$.
6. Najděte ireducibilní rozklad prvků 3, 5, 6, 7, $10 - 6i$, $9 + 3i$ a $11 + 2i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
7. Najděte ireducibilní rozklad prvků 2, 3, 5 a $5 - 2\sqrt{-2}$ v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.