Algebra 22/23: 14. cvičení — skupina Ježil

Algebraické prvky a rozšíření konečného stupně

13.1 Z minula

1. Jak vypadají faktorokruhy $\mathbb{Z}[x]/I$, kde (a) $I = (x-1)\mathbb{Z}[x]$, (b) $I = (x^2+1)\mathbb{Z}[x]$, (c) $I = (x^2-1)\mathbb{Z}[x]$? Pozor, ten poslední není izomorfní okruhu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: rozmyslete si pečlivě, co je obrazem dosazovacího homomorfismu! [$\cong \mathbb{Z}$, $\cong \mathbb{Z}[i]$, $\cong \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; a \equiv b(\mathrm{mod} 2)\}$]

2. Jak vypadají faktorokruhy $\mathbf{T}[x]/(x^4-4)$, kde $\mathbf{T} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$? [$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \times \mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}[\sqrt{-2}]$, $\mathbb{C}^4$]

3. Jak vypadají faktorokruhy $\mathbf{R}[x,y]/I$, kde (a) $I = yR[x,y]$, (b) $I = (x+y)R[x,y]$, (c) $I = \{f : f(0,0) = 0\}$? [$R[x]$, $R[x]$, R]

13.2 Minimální polynom a stupeň jednoduchého rozšíření

Připomeňme značení $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$.

1. Spočtěte minimální polynom $m_{a,\mathbb{Q}}$ pro prvky $1+\sqrt{5}$, $1-\sqrt[3]{2}$, $\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$, $\sqrt[4]{6}$, $i+\sqrt{5}$. [x^2-2x-4,x^3-3x^2+3x+1, $x^2-10x-7$, x^4-6, x^4-8x^2+36]

2. Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ rozšíření těles a $a \in S$ algebraický prvek. Vyjádřete polynom $m_{a^{-1},\mathbf{T}}$ pomocí koeficientů polynomu $m_{a,\mathbf{T}}$. [pokud $m_{a,\mathbf{T}} = a_0 + a_1x + \cdots + x^n$ potom $m_{a^{-1},\mathbf{T}} = 1/a_0 + (a_{n-1}/a_0)x + \cdots + x^n$]

3. Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ rozšíření těles a $a \in S$ algebraický prvek. Dokažte, že pokud je $[\mathbf{T}(a) : \mathbf{T}]$ liché, pak $\mathbf{T}(a) = \mathbf{T}(a^2)$. [$[\mathbf{T}(a) : \mathbf{T}(a^2)] = [\mathbf{T}(a) : \mathbf{T}(a^2)][\mathbf{T}(a^2) : \mathbf{T}]$]

4. Buď $\mathbb{Q} \leq \mathbf{S} \leq \mathbb{C}$ rozšíření těles, $[\mathbf{S} : \mathbb{Q}] = 2$. Dokažte, že $\mathbf{S} = \mathbb{Q}(\sqrt{s})$ pro nějaké $s \in \mathbb{Z}$. [Nejprve ukažte že $\mathbf{S} = \mathbb{Q}(\alpha)$ pro nějaké α, a potom použijte minimální polynom $m_{\alpha,\mathbb{Q}}$ a kvadratickou formuli]

5. Spočtěte stupeň rozšíření kořenového nadtělesa polynomu $x^5 - 3x + 3$ nad tělesem $\mathbb{Q}$. [5]

6. Spočtěte stupeň rozšíření rozkladového nadtělesa polynomu $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ nad tělesem $\mathbb{Q}$. [4]

13.3 Vícenásobná rozšíření

1. Spočtěte stupeň rozšíření $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}]$. [6]

2. Dokažte, že $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt{p} : p$ je prvočíslo$)$ je algebraické rozšíření. Bonus: Ukažte, že je to rozšíření nekonečného stupně. [Konkrétní prvek bude žít v nějakém mezitělese, které má konečnou bázi nad $\mathbb{Q}$, pro bonus je třeba dokázat $[\mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}] : \mathbb{Q}] = 2^n$ pro p_i po dvou různá prvočísla]

3. Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S} \leq \mathbf{U}$ rozšíření těles, $\mathbf{U}$ algebraické nad $\mathbf{S}$ a $\mathbf{S}$ algebraické nad $\mathbf{T}$. Je nutně $\mathbf{U}$ algebraické nad $\mathbf{T}$? Pokud ano, dokažte. Pokud ne, uveďte protipříklad. [Uvažte $a \in U$, které je kořenem $\sum_{i=0}^{n} b_i x^i \in S[x]$, a rozšíření $[T[b_1, \ldots, b_n, a] : T]$, je konečného stupně?]