Algebra 22/23: 14. cvičení — skupina Ježil

---

**Algebraické prvky a rozšíření konečného stupně**

---

## 13.1 Z minula

**1.** Jak vypadají faktorokruhy $\mathbb{Z}[x]/I$, kde (a) $I = (x-1)\mathbb{Z}[x]$, (b) $I = (x^2+1)\mathbb{Z}[x]$, (c) $I = (x^2-1)\mathbb{Z}[x]$ ? Pozor, ten poslední není izomorfní okruhu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: rozmyslete si pečlivě, co je obrazem dosazovacího homomorfismu!

**2.** Jak vypadají faktorokruhy $\mathbf{T}[x]/(x^4-4)$, kde $\mathbf{T} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ?

**3.** Jak vypadají faktorokruhy $\mathbf{R}[x,y]/I$, kde (a) $I = yR[x,y]$, (b) $I = (x+y)R[x,y]$, (c) $I = \{f : f(0,0) = 0\}$ ?

## 13.2 Minimální polynom a stupeň jednoduchého rozšíření

Připomeňme značení $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$.

**1.** Spočtěte minimální polynom $m_{a,\mathbb{Q}}$ pro prvky $1+\sqrt{5}$, $1-\sqrt[3]{2}$, $\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$, $\sqrt[4]{6}$, $i+\sqrt{5}$.

**2.** Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ rozšíření těles a $a \in S$ algebraický prvek. Vyjádřete polynom $m_{a^{-1},\mathbf{T}}$ pomocí koeficientů polynomu $m_{a,\mathbf{T}}$.

**3.** Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ rozšíření těles a $a \in S$ algebraický prvek. Dokažte, že pokud je $[\mathbf{T}(a) : \mathbf{T}]$ liché, pak $\mathbf{T}(a) = \mathbf{T}(a^2)$.

**4.** Buď $\mathbb{Q} \leq \mathbf{S} \leq \mathbb{C}$ rozšíření těles, $[\mathbf{S} : \mathbb{Q}] = 2$. Dokažte, že $\mathbf{S} = \mathbb{Q}(\sqrt{s})$ pro nějaké $s \in \mathbb{Z}$.

**5.** Spočtěte stupeň rozšíření kořenového nadtělesa polynomu $x^5 - 3x + 3$ nad tělesem $\mathbb{Q}$.

**6.** Spočtěte stupeň rozšíření rozkladového nadtělesa polynomu $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ nad tělesem $\mathbb{Q}$.

## 13.3 Vícenásobná rozšíření

**1.** Spočtěte stupeň rozšíření $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}]$.

**2.** Dokažte, že $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt{p} : p$ je prvočíslo$)$ je algebraické rozšíření. Bonus: Ukažte, že je to rozšíření nekonečného stupně.

**3.** Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S} \leq \mathbf{U}$ rozšíření těles, $\mathbf{U}$ algebraické nad $\mathbf{S}$ a $\mathbf{S}$ algebraické nad $\mathbf{T}$. Je nutně $\mathbf{U}$ algebraické nad $\mathbf{T}$? Pokud ano, dokažte. Pokud ne, uveďte protipříklad.