Algebra 22/23: 13. cvičení — skupina Ježil

Homomorfismy a faktor(grupy/okruhy)

13.1 Normální podgrupy

1. Dokažte, že kažádá podgrupa abelovské grupy je normální. [$a + b + -a = b$]

2. Najděte všechny normální podgrupy grupy $\mathbf{D}_{10}$. [$\{\mathrm{id}\}, \langle(1\,2\,3\,4\,5)\rangle, \mathbf{D}_{10}$]

3. Dokažte, že je v kvaternionové grupě $\mathbf{Q}_8$ každá podgrupa normální.

4. Dokažte, že grupa $\mathbf{A}_5$ neobsahuje žádné vlastní normální podgrupy. (*Návod:* uvažujte normální podgrupu $\mathbf{N}$, která obsahuje permutaci jistého typu; podle tvrzení o konjugaci obsahuje $\mathbf{N}$ další permutace tohoto typu a složením dvou vhodných najděte trojcyklus nebo permutaci tvaru (..)(..).)

5. Dokažte, že grupa $\mathbf{S}_5$ obsahuje jedinou vlastní normální podgrupu, $\mathbf{A}_5$. (*Návod:* pokud $\mathbf{N}$ obsahuje pouze sudé permutace, použijte předchozí cvičení; v opačném případě nagenerujte transpozici.)

6. Popište všechny homomorfismy $\mathbf{S}_3 \to \mathbb{Z}_{10}$. [$\tau \mapsto \{0, 5\}$, kde τ je transpozice, jinak vše do 0]

7. Buď $\mathbf{G}$ grupa a $\mathbf{H}$ její podgrupa taková, že $[\mathbf{G} : \mathbf{H}] = 2$. Dokažte, že $\mathbf{H}$ je normální. [Stačí ukázat, že $\mathbf{H}a = a\mathbf{H}$.]

13.2 Konstrukce faktorgrupy

1. Popište pomocí 1. věty o izomorfismu, jak vypadají faktorgrupy $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^*/\{1, -1\}$ a $\mathbb{C}^*/\mathbf{N}$, kde $\mathbf{N}$ značí podgrupu čísel s absolutní hodnotou 1. [$\{1, -1\}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+$]

2. Popište grupy $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. [Sčítání až na násobky jedničky.]

3. Dokažte, že $\mathbb{C}^*/\mathbb{C}_n \simeq \mathbb{C}^*$. [Pomocí zobrazení $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \omega \mapsto \omega^n$]

4. Popište všechny faktorgrupy kvaternionové grupy $\mathbf{Q}_8$. [$\mathbf{Q}_8$, $\mathbb{Z}_2^2$, $\mathbb{Z}_2$, $\{1\}$]

13.3 Homomorfismy

1. Buď $\mathbf{R}, \mathbf{S}$ okruhy a $\varphi : R \to S$ zobrazení splňující $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ a $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ pro všechna $a, b \in R$. Dokažte:

- je-li φ bijektivní, pak je φ homomorfismus,
- je-li $\mathbf{S}$ obor, pak je φ homomorfismus.

2. Buď $\mathbf{R}, \mathbf{S}$ komutativní okruhy a $\varphi : R \to S$ homomorfismus. Dokažte, že $\varphi|_{R^*}$ je grupový homomorfismus $\mathbf{R}^* \to \mathbf{S}^*$. Je-li φ isomorfismus, pak jde o grupový izomorfismus *na* $\mathbf{S}^*$.
Poznámka: Uvědomte si, že toto tvrzení vztažené na $\mathbf{R} = \mathbb{Z}_n$ je jádrem důkazu vzorce na výpočet Eulerovy funkce.

3. Dokažte, že zobrazení $\mathbf{R}[x, y] \to \mathbf{R}$, $f \mapsto f(0, 0)$ je okruhovým homomorfismem. Spočtěte jeho jádro a obraz. Je jádro hlavní ideál? [Jádro odpovídá množině nekonstatních polynomů nad x a y a tato množina nemá tvar hlavního ideálu. Obraz odpovídá $\mathbf{R}$.]

4. Rozhodněte, zda je $\mathbb{Q}(i) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Rozmyslete si, jaká by byla odpověď pro obecnou dvojici $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{s})$. (*Návod:* homomorfismus zachovává řešení rovnice $x^2 = r$.) [Ne. A jinak se rovnají právě tehdy když: $r = s \cdot t^2$]

5. Jak vypadají faktorokruhy $\mathbb{Z}[x]/I$, kde (a) $I = (x - 1)\mathbb{Z}[x]$, (b) $I = (x^2 + 1)\mathbb{Z}[x]$, (c) $I = (x^2 - 1)\mathbb{Z}[x]$? Pozor, ten poslední není izomorfní okruhu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: rozmyslete si pečlivě, co je obrazem dosazovacího homomorfismu! [$\cong \mathbb{Z}$, $\cong \mathbb{Z}[i]$, $\cong \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; a \equiv b(\mathrm{mod} 2)\}$]

6. Jak vypadají faktorokruhy $\mathbf{T}[x]/(x^4 - 4)$, kde $\mathbf{T} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$? [$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \times \mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}[\sqrt{-2}]$, $\mathbb{C}^4$]

7. Jak vypadají faktorokruhy $\mathbf{R}[x, y]/I$, kde (a) $I = yR[x, y]$, (b) $I = (x + y)R[x, y]$, (c) $I = \{f : f(0, 0) = 0\}$? [$R[x]$, $R[x]$, R]