
Homomorfismy a faktor(grupy/okruhy)

13.1 Normální podgrupy

1. Dokažte, že každá podgrupa abelovské grupy je normální.
2. Najděte všechny normální podgrupy grupy \mathbf{D}_{10} .
3. Dokažte, že je v kvaternionové grupě \mathbf{Q}_8 každá podgrupa normální.
4. Dokažte, že grupa \mathbf{A}_5 neobsahuje žádné vlastní normální podgrupy. (*Návod:* uvažujte normální podgrupu \mathbf{N} , která obsahuje permutaci jistého typu; podle tvrzení o konjugaci obsahuje \mathbf{N} další permutace tohoto typu a složením dvou vhodných najdete trojcyklus nebo permutaci tvaru $(..)(..)$.)
5. Dokažte, že grupa \mathbf{S}_5 obsahuje jedinou vlastní normální podgrupu, \mathbf{A}_5 . (*Návod:* pokud \mathbf{N} obsahuje pouze sudé permutace, použijte předchozí cvičení; v opačném případě nagenertejte transpozici.)
6. Popište všechny homomorfismy $\mathbf{S}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_{10}$.
7. Buď \mathbf{G} grupa a \mathbf{H} její podgrupa taková, že $[\mathbf{G} : \mathbf{H}] = 2$. Dokažte, že \mathbf{H} je normální.

13.2 Konstrukce faktorgrupy

1. Popište pomocí 1. věty o izomorfismu, jak vypadají faktorgrupy $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^*/\{1, -1\}$ a \mathbb{C}^*/\mathbf{N} , kde \mathbf{N} značí podgrupu čísel s absolutní hodnotou 1.
2. Popište grupy \mathbb{R}/\mathbb{Z} a \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .
3. Dokažte, že $\mathbb{C}^*/\mathbb{C}_n \simeq \mathbb{C}^*$.
4. Popište všechny faktorgrupy kvaternionové grupy \mathbf{Q}_8 .

13.3 Homomorfismy

1. Buď \mathbf{R}, \mathbf{S} okruhy a $\varphi : R \rightarrow S$ zobrazení splňující $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ a $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ pro všechna $a, b \in R$. Dokažte:
 - je-li φ bijektivní, pak je φ homomorfismus,
 - je-li \mathbf{S} obor, pak je φ homomorfismus.
2. Buď \mathbf{R}, \mathbf{S} komutativní okruhy a $\varphi : R \rightarrow S$ homomorfismus. Dokažte, že $\varphi|_{R^*}$ je grupový homomorfismus $\mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{S}^*$. Je-li φ isomorfismus, pak jde o grupový izomorfismus *na* \mathbf{S}^* .
Poznámka: Uvědomte si, že toto tvrzení vztahované na $\mathbf{R} = \mathbb{Z}_n$ je jádrem důkazu vzorce na výpočet Eulerovy funkce.
3. Dokažte, že zobrazení $\mathbf{R}[x, y] \rightarrow \mathbf{R}$, $f \mapsto f(0, 0)$ je okruhovým homomorfismem. Spočítejte jeho jádro a obraz. Je jádro hlavní ideál?
4. Rozhodněte, zda je $\mathbb{Q}(i) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Rozmyslete si, jaká by byla odpověď pro obecnou dvojici $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{s})$. (*Návod:* homomorfismus zachovává řešení rovnice $x^2 = r$.)
5. Jak vypadají faktorokruhy $\mathbb{Z}[x]/I$, kde (a) $I = (x - 1)\mathbb{Z}[x]$, (b) $I = (x^2 + 1)\mathbb{Z}[x]$, (c) $I = (x^2 - 1)\mathbb{Z}[x]$? Pozor, ten poslední není izomorfní okruhu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: rozmyslete si pečlivě, co je obrazem dosazovacího homomorfismu!
6. Jak vypadají faktorokruhy $\mathbf{T}[x]/(x^4 - 4)$, kde $\mathbf{T} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$?
7. Jak vypadají faktorokruhy $\mathbf{R}[x, y]/I$, kde (a) $I = y\mathbf{R}[x, y]$, (b) $I = (x + y)\mathbf{R}[x, y]$, (c) $I = \{f : f(0, 0) = 0\}$?