Algebra 22/23: 12. cvičení — skupina Ježil

Působení grupy na množině, Brunsideova věta

12.1 Z minula

1. Napište všechny podgrupy grup $\mathbb{Z}_{36}$ a $\mathbb{Z}_{17}^*$. Nakreslete, jak jsou uspořádány inkluzí. [$k \cdot \mathbb{Z}_{36}$ kde $k \mid 36$; podobně pro $\mathbb{Z}_{17}^*$]

2. Najděte množiny $X_n \subseteq \mathbb{R}^2$ takové, že $\mathbf{Sym}(X_n) \simeq \mathbb{Z}_n$. [Obrazce získané z rotace n stejných částí, které nejsou symetrické podle reflexe.]

3. Spočtěte prvky grupy rotací čtyřstěnu. Dokažte, že tato grupa je izomorfní grupě $\mathbf{A}_4$. [Každá symetrie odpovídá permutaci na vrcholech.]

4. Popište grupy automorfismů všech tříprvkových grafů, kružnic, cest a grafu „domeček“. [Klika a antiklika na třech vrcholech mají grupu automorfismů izomorfní $\mathbf{S}_3$, hrana a dvojhrana na třech vrcholech má grupu automorfismů izo. $\mathbb{Z}_2$, kružnice mají D_{2n}, cesty $\mathbb{Z}_2$ a domeček $\mathbb{Z}_2$]

5. Najděte graf s aspoň dvěma vrcholy, který má triviální grupu automorfismů. [Třeba graf na 7 vrcholech, který má vrchol stupně tři, ze kterého vede cesta délky jedna, cesta délky dva a cesta délky tři.]

12.2 Abstraktní grupa jako grupa permutací

1. Uvažujte působení eukleidovské grupy $\mathbf{E}_2$ na množině $\mathbb{R}^2$. Která zobrazení obsahuje grupa $(\mathbf{E}_2)_x$ pro daný bod x? Které prvky patří do X_g, kde g je (a) translace, (b) rotace, (c) reflexe? [$\varnothing$, střed rotace, osa reflexe]

2. Uvažujte působení grupy $\mathbb{R}$ na množině $\mathbb{R}^2$, kde číslu $u \in \mathbb{R}$ odpovídá (a) permutace $(a,b) \mapsto (a+u,b)$ (tj. horizontální posunutí o u), (b) rotace o u stupňů se středem $(0,0)$. Ověřte, že to jsou skutečně působení a popište jejich orbity. [Orbity: horizontální přímky, kružnice s nezáporným poloměrem se středem $(0,0)$]

3. Uvažujte působení grupy $\mathbf{S}_n$ na množině $\{(a,b) : a,b \in \{1,\dots,n\}\}$, permutace π působí po složkách, tj. $\pi((a,b)) = (\pi(a),\pi(b))$. Kolik má toto působení orbit a jak jsou velké? Jak vypadají stabilizátory $\mathbf{G}_{(1,1)}$ a $\mathbf{G}_{(1,2)}$ a jaký mají index? [Dvě orbity, $[(1,1)]$ a $[(1,2)]$, Stabilizátory: $\mathbf{S}_{2,\dots,n}$, $\mathbf{S}_{3,\dots,n}$]

12.3 Burnsideova věta a počítání orbit

1. Dětská stavebnice obsahuje 8 červených a 8 modrých destiček ve tvaru pravidelného trojúhelníka. Kolika způsoby z nich lze sestavit velký trojúhelník o čtyřnásobné hraně, (a) až na otočení, (b) až na otočení a převrácení? [4290, 2220]

2. Dětská stavebnice obsahuje 16 čtvercových destiček, na kterých je nakreslena (I) jedna úhlopříčka, (II) šipka ve směru jedné z úhlopříček (z obou stran destičky je nakreslena stejně). Kolika způsoby z nich lze sestavit velký čtverec o čtyřnásobné hraně, (a) až na otočení, (b) až na otočení a převrácení? [16456, 8548]

3. Kolika způsoby lze napsat na kružnici se 169 pozicemi písmena A,C,G,U, pokud ji můžeme libovolně otáčet a převracet? (Čili grupa symetrií je $\mathbf{D}_{338}$.)
Poznámka: A,C,G,U jsou zkratky chemických bází RNA, která se skutečně někdy vyskytuje v kruhové formě. [$(4^{168} + 12 \cdot 13 \cdot 4 + 12 \cdot 4^{13} + 169 \cdot 4^{85})/338$]

4. Kolika způsoby lze obarvit stěny pravidelného čtyřstěnu k barvami, až na otočení? [$(k^4 + 11k^2)/12$]

12.4 Normální podgrupy

1. Najděte všechny normální podgrupy grupy $\mathbf{D}_{10}$. [$\langle(1\ 2\ 3\ 4\ 5)\rangle$]

2. Dokažte, že je v kvaternionové grupě $\mathbf{Q}_8$ každá podgrupa normální.