Algebra 22/23: 12. cvičení — skupina Ježil

---

**Působení grupy na množině, Brunsideova věta**

---

## 12.1 Z minula

**1.** Napište všechny podgrupy grup $\mathbb{Z}_{36}$ a $\mathbb{Z}_{17}^*$. Nakreslete, jak jsou uspořádány inkluzí.

**2.** Najděte množiny $X_n \subseteq \mathbb{R}^2$ takové, že $\mathbf{Sym}(X_n) \simeq \mathbb{Z}_n$.

**3.** Spočtěte prvky grupy rotací čtyřstěnu. Dokažte, že tato grupa je izomorfní grupě $\mathbf{A}_4$.

**4.** Popište grupy automorfismů všech tříprvkových grafů, kružnic, cest a grafu „domeček“.

**5.** Najděte graf s aspoň dvěma vrcholy, který má triviální grupu automorfismů.

## 12.2 Abstraktní grupa jako grupa permutací

**1.** Uvažujte působení eukleidovské grupy $\mathbf{E}_2$ na množině $\mathbb{R}^2$. Která zobrazení obsahuje grupa $(\mathbf{E}_2)_x$ pro daný bod $x$? Které prvky patří do $X_g$, kde $g$ je (a) translace, (b) rotace, (c) reflexe?

**2.** Uvažujte působení grupy $\mathbb{R}$ na množině $\mathbb{R}^2$, kde číslu $u \in \mathbb{R}$ odpovídá (a) permutace $(a, b) \mapsto (a + u, b)$ (tj. horizontální posunutí o $u$), (b) rotace o $u$ stupňů se středem $(0, 0)$. Ověřte, že to jsou skutečně působení a popište jejich orbity.

**3.** Uvažujte působení grupy $\mathbf{S}_n$ na množině $\{(a, b) : a, b \in \{1, \ldots, n\}\}$, permutace $\pi$ působí po složkách, tj. $\pi((a, b)) = (\pi(a), \pi(b))$. Kolik má toto působení orbit a jak jsou velké? Jak vypadají stabilizátory $\mathbf{G}_{(1,1)}$ a $\mathbf{G}_{(1,2)}$ a jaký mají index?

## 12.3 Burnsideova věta a počítání orbit

**1.** Dětská stavebnice obsahuje 8 červených a 8 modrých destiček ve tvaru pravidelného trojúhelníka. Kolika způsoby z nich lze sestavit velký trojúhelník o čtyřnásobné hraně, (a) až na otočení, (b) až na otočení a převrácení?

**2.** Dětská stavebnice obsahuje 16 čtvercových destiček, na kterých je nakreslena (I) jedna úhlopříčka, (II) šipka ve směru jedné z úhlopříček (z obou stran destičky je nakreslena stejně). Kolika způsoby z nich lze sestavit velký čtverec o čtyřnásobné hraně, (a) až na otočení, (b) až na otočení a převrácení?

**3.** Kolika způsoby lze napsat na kružnici se 169 pozicemi písmena A,C,G,U, pokud ji můžeme libovolně otáčet a převracet? (Čili grupa symetrií je $\mathbf{D}_{338}$.)
*Poznámka:* A,C,G,U jsou zkratky chemických bází RNA, která se skutečně někdy vyskytuje v kruhové formě.

**4.** Kolika způsoby lze obarvit stěny pravidelného čtyřstěnu $k$ barvami, až na otočení?

## 12.4 Normální podgrupy

**1.** Najděte všechny normální podgrupy grupy $\mathbf{D}_{10}$.

**2.** Dokažte, že je v kvaternionové grupě $\mathbf{Q}_8$ každá podgrupa normální.