Algebra 22/23: 11. cvičení — skupina Ježil

Grupy

11.1 Homomorfismy

1. Popište všechny homomorfismy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ a $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. [$\varphi((0,1)) \in \{0,2\}, \varphi((1,0)) \in \{0,2\}$; $\varphi(1) \in \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$]

2. Popište všechny homomorfismy $\mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ a $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{15}$. Na základě těchto příkladů si zkuste rozmyslet, jak vypadají všechny homomorfismy $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$. [$\varphi(1) \in \{0,2,4\}$; $\varphi(1) \in \{0,5,10\}$]

3. Popište všechny homomorfismy $\mathbb{Z}_{11}^* \to \mathbb{Z}_6$ a $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{11}^*$. [$\varphi(2) \in \{0,3\}$; $\varphi(1) \in \{1,10\}$]

11.2 (Ne)izomorfismus

1. Dokažte, že jsou všechny tři grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_8^*$ a $\{id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \leq \mathbf{S}_4$ navzájem izomorfní. [Stačí stotožnit prvky řádu > 1 a ukázat, že struktura grupové operace je zachována.]

2. Dokažte, že $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^+$, kde $\mathbb{R}^+$ je podgrupa kladných čísel v grupě $\mathbb{R}^*$. [Izomorfismus je $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$]

3. Dokažte, že $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbf{S}_3$. (*Návod:* všechny permutace nenulových vektorů jsou lineární zobrazení.)

4. Dokažte, že $\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{R}^+ \times \mathbf{S}$, kde $\mathbf{S}$ je podgrupa komplexních jednotek v grupě $\mathbb{C}^*$. [Zapsat prvek $\mathbb{C}$ jako $z \cdot e^{\omega 2\pi i}$.]

5. Dokažte, že každá čtyřprvková grupa je izomorfní grupě $\mathbb{Z}_4$ nebo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. [Rozbor případů podle možných řádů prvků.]

6. Rozložte grupy $\mathbb{Z}_{16}^*$, $\mathbb{Z}_{20}^*$ a $\mathbb{Z}_{27}^*$ na direktní součin cyklických grup (tj. napište konkrérní direktní součin, jemuž jsou tyto grupy izomorfní). Nezapomeňte na čínskou větu o zbytcích. [$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$,$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_{27}$]

7. Rozhodněte, zda jsou grupy $\mathbb{Z}_{24}*$ a $\mathbb{Z}_{15}^*$ izomorfní. [ne]

8. Dokažte, že $\mathbb{Q} \not\simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. (*Návod:* buď $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ prostý homomorfismus, nechť $\varphi(1) = (r,s)$. Dokažte, že tato hodnota už určuje zobrazení jednoznačně a že nikdy nedostaneme zobrazení na $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.)

11.3 Podgrupy, generátory, řády prvků

1. Rozhodněte, zda jsou následující grupy cyklické: $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbb{Z}_{12}^*$, $\mathbb{Z}_{14}^*$. [ano, ne, ne, ano]

2. Najděte všechny generátory grup $\mathbb{Z}_{22}$, $\mathbb{Z}_{23}^*$ a grupy $\mathbb{F}_9^*$, kde $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^2+1)$ je devítiprvkové těleso. [1, 2, $\alpha + 1$]

3. Kolik podgrup mají grupy $\mathbb{Z}_{120}$ a $\mathbb{Z}_{131}^*$? [16, 8]

4. Napište všechny podgrupy grup $\mathbb{Z}_{36}$ a $\mathbb{Z}_{17}^*$. Nakreslete, jak jsou uspořádány inkluzí. [$k \cdot \mathbb{Z}_{36}$ kde $k \mid 36$; podobně pro $\mathbb{Z}_{17}^*$]

11.4 Symetrie geometrických objektů a matematických struktur

1. Najděte množiny $X_n \subseteq \mathbb{R}^2$ takové, že $\mathbf{Sym}(X_n) \simeq \mathbb{Z}_n$. [Obrazce získané z rotace n stejných částí, které nejsou symetrické podle reflexe.]

2. Spočtěte prvky grupy rotací čtyřstěnu. Dokažte, že tato grupa je izomorfní grupě $\mathbf{A}_4$. [Každá symetrie odpovídá permutaci na vrcholech.]

3. Popište grupy automorfismů všech tříprvkových grafů, kružnic, cest a grafu „domeček“. [Klika a antiklika na třech vrcholech mají grupu automorfismů izomorfní $\mathbf{S}_3$, hrana a dvojhrana na třech vrcholech má grupu automorfismů izo. $\mathbb{Z}_2$, kružnice mají D_{2n}, cesty $\mathbb{Z}_2$ a domeček $\mathbb{Z}_2$]

4. Najděte graf s aspoň dvěma vrcholy, který má triviální grupu automorfismů. [Třeba graf na 7 vrcholech, který má vrchol stupně tři, ze kterého vede cesta délky jedna, cesta délky dva a cesta délky tři.]