

---

## Grupy

---

### 11.1 Homomorfismy

1. Popište všechny homomorfismy  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4$  a  $\mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .
2. Popište všechny homomorfismy  $\mathbb{Z}_{15} \rightarrow \mathbb{Z}_6$  a  $\mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_{15}$ . Na základě těchto příkladů si zkuste rozmyslet, jak vypadají všechny homomorfismy  $\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m$ .
3. Popište všechny homomorfismy  $\mathbb{Z}_{11}^* \rightarrow \mathbb{Z}_6$  a  $\mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_{11}^*$ .

### 11.2 (Ne)izomorfismus

1. Dokažte, že jsou všechny tři grupy  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_8^*$  a  $\{id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \leq \mathbf{S}_4$  navzájem izomorfní.
2. Dokažte, že  $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^+$ , kde  $\mathbb{R}^+$  je podgrupa kladných čísel v grupě  $\mathbb{R}^*$ .
3. Dokažte, že  $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbf{S}_3$ . (Návod: všechny permutace nenulových vektorů jsou lineární zobrazení.)
4. Dokažte, že  $\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{R}^+ \times \mathbf{S}$ , kde  $\mathbf{S}$  je podgrupa komplexních jednotek v grupě  $\mathbb{C}^*$ .
5. Dokažte, že každá čtyřprvková grupa je izomorfní grupě  $\mathbb{Z}_4$  nebo  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .
6. Rozložte grupy  $\mathbb{Z}_{16}^*$ ,  $\mathbb{Z}_{20}^*$  a  $\mathbb{Z}_{27}^*$  na direktní součin cyklických grup (tj. napište konkrétní direktní součin, jemuž jsou tyto grupy izomorfní). Nezapomeňte na čínskou větu o zbytcích.
7. Rozhodněte, zda jsou grupy  $\mathbb{Z}_{24}^*$  a  $\mathbb{Z}_{15}^*$  izomorfní.
8. Dokažte, že  $\mathbb{Q} \not\simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ . (Návod: buď  $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  prostý homomorfismus, nechť  $\varphi(1) = (r, s)$ . Dokažte, že tato hodnota už určuje zobrazení jednoznačně a že nikdy nedostaneme zobrazení na  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ .)

### 11.3 Podgrupy, generátory, řády prvků

1. Rozhodněte, zda jsou následující grupy cyklické:  $\mathbf{A}_3$ ,  $\mathbf{S}_3$ ,  $\mathbb{Z}_{12}^*$ ,  $\mathbb{Z}_{14}^*$ .
2. Najděte všechny generátory grup  $\mathbb{Z}_{22}$ ,  $\mathbb{Z}_{23}^*$  a grupy  $\mathbb{F}_9^*$ , kde  $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^2 + 1)$  je devítiprvkové těleso.
3. Kolik podgrup mají grupy  $\mathbb{Z}_{120}$  a  $\mathbb{Z}_{131}^*$ ?
4. Napište všechny podgrupy grup  $\mathbb{Z}_{36}$  a  $\mathbb{Z}_{17}^*$ . Nakreslete, jak jsou uspořádány inkluzí.

### 11.4 Symetrie geometrických objektů a matematických struktur

1. Najděte množiny  $X_n \subseteq \mathbb{R}^2$  takové, že  $\mathbf{Sym}(X_n) \simeq \mathbb{Z}_n$ .
2. Spočítejte prvky grupy rotací čtyřstěnu. Dokažte, že tato grupa je izomorfní grupě  $\mathbf{A}_4$ .
3. Popište grupy automorfismů všech tříprvkových grafů, kružnic, cest a grafu „domeček“.
4. Najděte graf s aspoň dvěma vrcholy, který má triviální grupu automorfismů.