Algebra 22/23: 10. cvičení — skupina Ježil

Grupy

10.1 Mocniny a řád prvku

1. Spočtěte řád prvku 7 v grupách $\mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}_{15}^*$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^*$. [15, 4, ∞, ∞]

2. Najděte všechny prvky konečného řádu v grupě $\mathbb{C}^*$. [$e^{2\pi iq}, q \in \mathbb{Q}$]

3. Existují v grupách $\mathbf{S}_6$ a $\mathbf{S}_7$ prvky řádů 9, 10, 11, či 12? [$\mathbf{S}_6$: ne, ne, ne, ne; $\mathbf{S}_7$: ne, ano, ne, ano]

4. Spočtěte řád matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ v grupách $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q})$ a $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_7)$. [V obou případech se rovná řádu prvku a ve sčítací grupě daného tělesa]

5. Spočtěte řád matice $\left(\begin{smallmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right)$ v grupě $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$. [Pro úhel $\frac{k}{l}2\pi i$ je řád $\mathrm{NSD}(k,l)$ jinak je řád nekonečno.]

6. Dokažte, že v každé grupě sudého řádu existuje prvek řádu 2. [Spočítejte rozklad grupy na množiny $\{a, a^{-1}\}$]

7. Buď $\mathbf{G}$ grupa, kde pro každé $a \neq 1$ platí $\mathrm{ord}(a) = 2$. Dokažte, že $\mathbf{G}$ je abelovská. [$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$]

8. Tvoří prvky konečného řádu podgrupu? Pokud ano, dokažte, pokud ne, uveďte protipříklad. Jak tomu je v abelovských grupách? [Uvažte grupu jejíž prvky jsou slova s písmeny z množiny $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ která neobsahují podslovo `aa` ani `bb`, s operací $\cdot$, která funguje jako zapsání slov za sebou, až na to, že všechny výskyty `aa` a `bb` jsou vymazány. V abelovských to platí.]

10.2 Podgrupy

1. Dokažte, že $\mathbb{Q} = \langle \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \rangle$ a $\mathbb{Q}^* = \langle -1, \text{prvočísla} \rangle$. Dokažte, že tyto grupy nelze nagenerovat konečně mnoha čísly. [První část jasná. Druhá část: Uvažte možné prvočíselné rozklady jmenovatelů.]

2. Dokažte, že $\langle a, b \rangle_{\mathbb{Z}} = \{ka + lb : \ k, l \in \mathbb{Z}\} = \langle \mathrm{NSD}(a, b) \rangle_{\mathbb{Z}}$. (*Návod:* Bézoutova rovnost.)

3. Spočtěte prvky podgrup $\langle \frac{3}{4}, \frac{2}{7} \rangle_{\mathbb{Q}}$ a $\langle \frac{2}{3}, \frac{2}{5} \rangle_{\mathbb{Q}}$. [$\langle \frac{1}{28} \rangle, \langle \frac{2}{15} \rangle$]

4. Dokažte, že $\mathbf{S}_n = \langle (1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n) \rangle$ a $\mathbf{A}_n = \langle (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \ldots, (1\ 2\ n) \rangle$. [Stačí nagenerovat všechny transpozice, resp. složení dvou transpozic.]

5. Dokažte, že $\mathbf{D}_{2n} = \langle \rho, \sigma \rangle$, kde ρ je rotace o úhel $2\pi/n$ a σ je libovolná reflexe. [Geometrický náhled: Po nagenerování všech rotací je můžu použít ke konjugování jedné reflexe a tím dostat všechny ostatní.]

6. Napište všechny podgrupy grupy $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{D}_8$. Nakreslete uspořádanou množinu všech podgrup vzhledem k inkluzi. (*Návod:* pomocí Lagrangeovy věty lze dobře argumentovat, že jste našli všechny podgrupy.)

10.3 Homomorfismy

1. Popište všechny homomorfismy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ a $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. [$\varphi((0,1)) \in \{0,2\}, \varphi((1,0)) \in \{0,2\}$; $\varphi(1) \in \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$]

2. Popište všechny homomorfismy $\mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ a $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{15}$. Na základě těchto příkladů si zkuste rozmyslet, jak vypadají všechny homomorfismy $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$. [$\varphi(1) \in \{0,2,4\}$; $\varphi(1) \in \{0,5,10\}$]

3. Popište všechny homomorfismy $\mathbb{Z}_{11}^* \to \mathbb{Z}_6$ a $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{11}^*$. [$\varphi(2) \in \{0,3\}$; $\varphi(1) \in \{1,10\}$]

4. Popište všechny homomorfismy $\mathbf{S}_3 \to \mathbb{Z}_n$ v závislosti na n. [Pokud n liché potom jedině triviální homomorfizmus, jinak posíláme $(1\,2) \mapsto n/2$ a $(1\,2\,3) \mapsto 0$]

5. Popište všechny homomorfismy $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ a spojité homomorfismy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Existuje nějaký nespojitý homomorfismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$? [$1 \mapsto z$; $1 \mapsto q$; $1 \mapsto r$ a existuje z faktu, že $\mathbb{R}$ je nekonečnědimenzionální vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$]