Algebra 22/23: 10. cvičení — skupina Ježil

Grupy

10.1 Mocniny a řád prvku

1. Spočtěte řád prvku 7 v grupách $\mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}_{15}^*$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^*$.

2. Najděte všechny prvky konečného řádu v grupě $\mathbb{C}^*$.

3. Existují v grupách $\mathbf{S}_6$ a $\mathbf{S}_7$ prvky řádů 9, 10, 11, či 12?

4. Spočtěte řád matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ v grupách $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q})$ a $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_7)$.

5. Spočtěte řád matice $\left(\begin{smallmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right)$ v grupě $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$.

6. Dokažte, že v každé grupě sudého řádu existuje prvek řádu 2.

7. Buď $\mathbf{G}$ grupa, kde pro každé $a \neq 1$ platí $\mathrm{ord}(a) = 2$. Dokažte, že $\mathbf{G}$ je abelovská.

8. Tvoří prvky konečného řádu podgrupu? Pokud ano, dokažte, pokud ne, uveďte protipříklad. Jak tomu je v abelovských grupách?

10.2 Podgrupy

1. Dokažte, že $\mathbb{Q} = \langle \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \rangle$ a $\mathbb{Q}^* = \langle -1, \text{prvočísla} \rangle$. Dokažte, že tyto grupy nelze nagenerovat konečně mnoha čísly.

2. Dokažte, že $\langle a, b \rangle_{\mathbb{Z}} = \{ka + lb : \ k, l \in \mathbb{Z}\} = \langle \mathrm{NSD}(a, b) \rangle_{\mathbb{Z}}$. (*Návod:* Bézoutova rovnost.)

3. Spočtěte prvky podgrup $\langle \frac{3}{4}, \frac{2}{7} \rangle_{\mathbb{Q}}$ a $\langle \frac{2}{3}, \frac{2}{5} \rangle_{\mathbb{Q}}$.

4. Dokažte, že $\mathbf{S}_n = \langle (1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n) \rangle$ a $\mathbf{A}_n = \langle (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \ldots, (1\ 2\ n) \rangle$.

5. Dokažte, že $\mathbf{D}_{2n} = \langle \rho, \sigma \rangle$, kde ρ je rotace o úhel $2\pi/n$ a σ je libovolná reflexe.

6. Napište všechny podgrupy grupy $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{D}_8$. Nakreslete uspořádanou množinu všech podgrup vzhledem k inkluzi. (*Návod:* pomocí Lagrangeovy věty lze dobře argumentovat, že jste našli všechny podgrupy.)

10.3 Homomorfismy

1. Popište všechny homomorfismy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ a $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

2. Popište všechny homomorfismy $\mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ a $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{15}$. Na základě těchto příkladů si zkuste rozmyslet, jak vypadají všechny homomorfismy $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$.

3. Popište všechny homomorfismy $\mathbb{Z}_{11}^* \to \mathbb{Z}_6$ a $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{11}^*$.

4. Popište všechny homomorfismy $\mathbf{S}_3 \to \mathbb{Z}_n$ v závislosti na n.

5. Popište všechny homomorfismy $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ a spojité homomorfismy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Existuje nějaký nespojitý homomorfismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?