

Algoritmy na polynomech — Cvičení 4

ondrej.jezil@email.cz

November 2023

1 Teoretická část

Gröbnerovy báze

1. Kolik řešení má následující soustava v \mathbb{Q} a v \mathbb{C} ?

$$1 + 2x^2 + y^2 + 4x^2y^2 + 2x^2y^4 = 0, xy^2 + xy^4 = 0.$$

0, ∞

2. Kolik řešení má následující soustava v \mathbb{Q} a v \mathbb{C} ?

$$x^2 - 2xy^2 + 1 = 0, xy - 2y^2 + x = 0.$$

1, 5

3. Umíte (ne)algebraicky odůvodnit neřešitelnost následující soustavy polynomů nad \mathbb{C} ?

$$\begin{aligned} x_i^3 &= 1, i \in \{1, 2, 3, 4\} \\ x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 &= 0, 1 \leq i < j \leq 4. \end{aligned}$$

4. (K zamyšlení) Nechť $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m]$, $T \geq \mathbb{Q}$ těleso a $t_1, \dots, t_k \in T$ tak, že $\sum_{i=1}^k t_i f_i = 1$. Platí potom, že existují $\{q_1, \dots, q_k\} \in \mathbb{Q}$ tak, že:

$$\sum_{i=1}^k q_i f_i = 1?$$

. Zde stačí vzít bázi vektorového prostoru generovaného všemi termy polynomů $t_i f_i$

Bezčtvercová faktorizace polynomů

1. Spočtěte bezčtvercovou faktorizaci polynomu $x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 2$ nad $\mathbb{Z}[x]$.

2. Spočtete bezčtvercovou faktorizaci polynomu $x^7 + x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + x + 1$ nad $\mathbb{Z}[x]$.
3. Spočtete bezčtvercovou faktorizaci polynomu $x^6 + x^4 + x^2 + 1$ nad $\mathbb{Z}_2[x]$.
4. Spočtete bezčtvercovou faktorizaci polynomu $x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1$ nad $\mathbb{Z}_3[x]$.