Algoritmy na polynomech — Cvičení 3

ondrej.jezil@email.cz

November 2023

1 Teoretická část

1. Najděte normovanou redukovanou Gröbnerovu bázi ideálu
$$\langle x^2y^2 + y - 1, x^2y + x\rangle \leq \mathbb{Q}[x, y]$$
pro $<_{GLEX}, x < y$. Patří $x^2y^3 - 2xy + 3y$ do tohoto ideálu? $\{y - 1, x\}$, ne

2. Najděte normovanou redukovanou Gröbnerovu bázi ideálu
$$\langle x^2 - 2y^2, xy - 3\rangle \leq \mathbb{Q}[x, y]$$
pro libovolné přípustné uspořádání. Patří $2y^3 - x + 3$ do tohoto ideálu? Pro $>_{GLEX}, x > y$ máme $\{x^2 - 2y^2, xy - 3, y^3 - \frac{3}{2}x\}$, ne

3. Platí obecně $IJ = I \cap J$, kde I, J jsou ideály nějakého oboru? Ne, $I = J = \langle 2\rangle$ v $\mathbb{Z}[x]$

4. Nechť $I = \langle f_1, ..., f_n\rangle$, $J = \langle g_1, ..., g_m\rangle$ jsou ideály z $T[x_1, ..., x_k]$. Dokažte:
   (a) $I + J = \langle f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m\rangle$, Z def.
   (b) $IJ = \langle f_i g_j \mid i \leq n, j \leq m\rangle$, Přibližně z def.
   (c) $I \cap J = (zI + (1 - z)J) \cap T[x_1, ..., x_k]$, kde z je nová proměnná. Vizte poznámku v mailu od doc. Šarocha

5. Nechť jsou I, J ideály v $T[x_1, \ldots, x_k]$, dokažte:
   (a) $V(I) \cap V(J) = V(I + J)$,
   (b) $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$. Mluví se o množinách nul, rozmyslete si kdy výrazy z bází ideálů vpravo budou nulované.

   Pomocí těchto pozorování zkontruujte algoritmus, který z algebraických množin $A = V(f_1, ..., f_n)$ a $B = V(g_1, ..., g_m)$ spočítá $A \cap B$ a $A \cup B$.

6. Kolik řešení má následující soustava v $\mathbb{Q}$ a v $\mathbb{C}$?
$$1 + 2x^2 + y^2 + 4x^2y^2 + 2x^2y^4 = 0, xy^2 + xy^4 = 0.$$

7. Kolik řešení má následující soustava v $\mathbb{Q}$ a v $\mathbb{C}$?
$$x^2 - 2xy^2 + 1 = 0, xy - 2y^2 + x = 0.$$

2 Výpočetní část

1. Ověřte 1 pomocí sage.
2. Ověřte 2 pomocí sage.