Algoritmy na Polynomech — Cvičení 2

ondrej.jezil@email.cz

Říjen 2023

1 Teoretická část

0. Vzpomeňte si na větu, která tvrdí, že graf G je normální právě tehdy, když je konfluentní. Lze tato věta zesílit na tvrzení: „Graf G je konvergentní právě tehdy, když je konfluentní?“ A platí to pro G konečné? Ne, existuje normální neterminující graf, třeba orientovaný cyklus, takže ani pro konenčné neplatí.

1. Dokažte, že $\ll$ je ostré a terminující uspořádání, za předpokladu, že $<$ je přípustné uspořádání na termech. Je lineární? $f < < f$ vede podle indukce ke sporu. Posloupnost $f_1 \gg f_2 \gg f_3 \gg \dots$ musí mít od nějakého indexu neměnný nejvyšší term. Nechť je to index i, potom odečtěte od každého polynomu v $f_i \gg f_{i+1} \gg \dots$ nejvyšší člen, porovnávání se zachová a maximální počet členů v celé poslounpsti se sníží o 1. Toto lze opakovat jen konečněkrát podle terminovanosti $>$, obdržíme indexy $i_1, \dots i_k$ a zbytek posloupnosti $g_{i_k} \gg$ už může obsahovat jen nulové polynomy, spor s definicí $\ll$.

2. Všimněte se, že obecně není $\ll$ lineární. (Předchozí cvičení.) Předpokládejte, že máme nějaké přirozené uspořádání na našem tělesu (jako např. na $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$). Lze „zlinearizovat“ $\ll$ na nějaké $\ll'$, které již bude lineární? Bude mít $\ll'$ nějakou (pro výpočty) nepříjemnou vlastnost? Lze linearizovat pomocí koeficientů, ovšem nebude terminující.

3. Uspořádejte $xy^2 + x^2y$, $-2xy^2 + x^2 + x^2y$, $-x^2y + 2x^2y^2 + 2$, $x^2y + x + 2y^2$ pomocí uspořádání $\ll$ určeného termovým uspořádáním:
   (a) $<_{LEX}, x > y$; $-2x^2y + 2x^2y^2 + 2 \gg -2xy^2 + x^2 + x^2y \gg x^2y + xy^2 \gg x^2y + x + 2y^2$
   (b) $<_{LEX}, x < y$; stejné
   (c) $<_{GLEX}, x > y$; stejné
   (d) $<_{GLEX}, x < y$. stejné

4. Dokažte, že $<_{LEX}, <_{GLEX}$ a vaháhovaně lexikografické uspořádání jsou přípustné. Přímočaře z definice.

5. Předpokládjte, že $R = \{xy - x^3 - x^2, x^4 + x^3 + x\}$ je Gröbnerova báze pro $<_{LEX}, x < y$. Určete, zda $x^4y^4 + x^3y^3 \in \langle R \rangle$. $x^4y^4 + x^3y^3 \to x^6y^3 + x^5y^3 + x^3y^3 \to -x^5y^3 - x^3y^3 + x^5y^3 + x^3y^3 = 0$

6. Ukažte, že R není Gröbnerova báze pro $<_{LEX}, x > y$. $(x^4 + x^3 + x) + x(xy - x^3 - x^2) = x + x^2y$ je terminál, ale je v ideálu.

7. * Ukažte, že problém určit zda polynom $p(\overline{x})$ náleží danému ideálu $I \leq \mathbb{Q}[\overline{x}]$ je NP-těžký. Je i co-NP-těžký?

2 Výpočetní část

1. Ověřte 3 pomocí sage (bude se hodit link, pozor, uspořádání na polynomech využívá hodnot koeficientů, to není konzistentní s naší definicí $\ll$).

2. Ověřte 5 pomocí sage.