

# Algoritmy na polynomech — Domácí úkol 1

ondrej.jezil@email.cz

Listopad 2023

## 1 Teoretická část

1. Necht  $R = \{r\}$ ,  $r \in T[x] \setminus \{0\}$ . Ukažte, že výsledek algoritmu  $A$  (přepisovací procedury) na  $f$  je  $(f \bmod r)$ . Ukažte, že  $R$  je Gröbnerova báze ideálu  $rT[x]$ .
2. Charakterizujte Gröbnerovy báze  $T[x]$ . **Hint:**  $T[x]$  je obor hlavních ideálů.
3. Charakterizujte všechny přípustné termové uspořádání pro  $T[x]$ .
4. Najděte redukovanou normovanou Gröbnerovu bázi

$$\langle x^3 + x^2 + x + 1, x^4 - 3x^2 - 2x \rangle$$

v  $\mathbb{Q}[x]$ . Inspirujte se výsledkem a popište výstup Buchbergera algoritmu pokud má na vstupu polynomy  $f, g \in T[x]$ . Nakonec charakterizujte normované redukované Gröbnerovy báze v  $T[x]$ .

5. Najděte normovanou redukovanou Gröbnerovu bázi

$$\langle 2x + y + 4z - 1, x - y - z, 2x - y + z + 1 \rangle$$

v  $\mathbb{Q}[x, y, z]$  s lexikografickým uspořádáním  $x > y > z$ .

Inspirujte se tímto výsledkem a popište, jak lze nalézt normovanou redukovanou Gröbnerovu bázi pro ideál generovaný lineárními polynomy pomocí Gaussovy eliminace.

## 2 Výpočetní část

Pro následující úlohy předpokládáme, že pracujeme nad tělesem  $\mathbb{Q}$  a uspořádání máme lexikografické  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Používejte sage pouze pro reprezentaci polynomů a výpočet jejich aritmetických operací. Funkce sage, jakou jsou Buchbergerův algoritmus, hledání Gröbnerových bází a rozpoznávání náležitosti v ideálu nepoužívejte.

1. Implementujte Buchbergerův algoritmus.

2. Implementujte algoritmus na redukci Gröbnerovy báze na normovanou redukovanou. Můžete předpokládat, že na vstupu je vždy Gröbnerova báze.
3. Implementujte algoritmus, který rozhodne, zda daný polynom patří do daného ideálu. Můžete opět předpokládat že na vstupu je Gröbnerova báze.
4. Zkombinujte tyto algoritmy do jednoho, který určí zda polynom náleží do daného ideálu zadaného libovolnou jeho bází.