Algoritmy na polynomech

ondrej.jezil@email.cz

Říjen 2023

1 Teoretická čast

1. Uveďte příklad oboru, který:
   - je Gaussovský a Noetherovský; $\mathbb{Z}$
   - je Gaussovský a není Noetherovský; $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$ (spočetně mnoho proměnných)
   - není Gaussovský a je Noetherovský; $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$
   - není Gaussovský a není Noetherovský. $[\sqrt{-5}][x_1, x_2, \dots]$
2. Komutativní okruh R se nazývá *Artinovský* právě tehdy, když v něm neexistuje nekonečná klesající posloupnost ideálů. Jinými slovy pokud v R existuje posloupnost ideálů $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq$ ..., potom existuje k, že $I_k = I_{k+j}$, pro všechny $j \in \mathbb{N}$. Uveďte příklad oboru, který:
   - je Artinovský a je Noetherovský; $\mathbb{Z}_2$
   - není Artinovský a je Noetherovský; $\mathbb{Z}$
   - není Artinovský a není Noetherovský. $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$
3. Dokažte, že každý Artinovský obor je těleso. Uvažte libovolný prvek $a \in R$, a posloupnost $aR \subseteq a^2R \subseteq \dots$
4. Dokažte nebo uveďte protipříklad:
   - Každý konečný graf je terminující. Ne, orientovaná kružnice.
   - Každý konečný graf je les, pokud zapomeneme na jeho orientaci. Ne, dag která není strom.
   - Každý konečný neorientovaný graf lze orientovat tak, aby byl terminující. Ano, indukcí podle počtu hran.
5. Vrchol $nf(x)$ se nazývá *normalní tvar* vrcholu x právě tehdy, když $nf(x)$ je terminál a $x \xrightarrow{*} nf(x)$. Ukažte, že terminující graf G je konvergentní právě tehdy, když každý vrchol v G má jednoznačný normální tvar. * Platí tato ekvivalence, bez předpokladu termínujícnosti? Normalita $\implies$ jednoznačnost: Kdyby existovaly dva různé normální tvary, musí existovat jejich společný následník, jelikož jsou terminály, to nemůže nastat. Jednoznačnost $\implies$ normalita: Stačí ukázat, že $x \leftrightarrow y$ implikuje $nf(x) = nf(y)$. *) Ne, existuje neterminující graf s jednoznačným normálním tvarem: nekonečná orientovaná cesta, ke které se přidá jeden bod navíc, do kterého budou všechny ostatní body vést.
6. * Ukažte, že problém určit zda polynom $p(\overline{x})$ náleží danému ideálu $I \leq \mathbb{Q}[\overline{x}]$ je NP-těžký. Je i co-NP-těžký?
7. ** Uveďte příklad komutativního okruhu, který je Artinovský, ale není Noetherovský. Existuje takový?

2 Programovací část

1. Prostudujte první dvě části tutoriálu pro `sagemath`.
   `https://doc.sagemath.org/html/en/tutorial/index.html`