

TOPOLOGICKÉ METODY VE FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZE - PŘEDNÁŠKA JARO 2025

Literatura. R. Phelps, Convex functions, monotone operators and differentiability, Springer 1993.

1. POJEM DERIVACE NA NORMOVANÉM PROSTORU

(Budeme se zabývat reálnými Banachovými prostory.)

Cílem je studovat diferencovatelnost speciálních typů funkcí (norem, konvexních funkcí) a souvislost jejich diferencovatelnosti s topologickými či geometrickými vlastnostmi Banachových prostorů. Např. ukážeme, že ekvivalentní normy na Banachově prostoru X mají derivaci v reziduální množině bodů, pokud je duální prostor X^* separabilní nebo pokud má některé geometrické vlastnosti.

Definice pojmů a značení

Pro normované prostory X a Y , funkci f z X do Y a $x \in X$ definujeme pojmy

- (a) *derivace ve směru* $\partial_h f(x)$, $\partial_h^+ f(x)$;
- (b) *Gâteauxova derivace* (*Gâteauxův diferenciál*) $f'_G(x)$;
- (c) *Fréchetova derivace* (*Fréchetův diferenciál*) $f'_F(x)$.

Lemma 1.1. *Pro X, Y normované prostory, f z X do Y , $x \in X$, $x^* \in X^*$ platí*

- (a) $f'_G(x) = x^*$, právě když $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = x^*(h)$ pro $h \in S_X$;
- (b) $f'_F(x) = x^*$, právě když $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = x^*(h)$ stejnoměrně v $h \in S_X$.

Důkaz. Obojí plyne z definic. Lze užít toho, že derivace ve směru je pozitivně homogenní. Pro druhou pak navíc přepis $h = \|h\| \cdot \frac{h}{\|h\|}$. $\square$

Známa fakta. Souvislosti mezi uvedenými pojmy a souvislost se spojitostí, bodová a stejnoměrná konvergence derivačních podílů, derivace složeného zobrazení, ... Zejména $f'_F(a) \in L(X, Y)$, právě když $\|f(a+h) - f(a) - f'_F(a)(h)\|_Y = o(\|h\|_X)$ pro $h \rightarrow 0$. Z toho plyne spojitost f v a . Obojí užijeme pro výpočet derivace složeného zobrazení:

$(g \circ f)'_F(a)(h) = g'_F(f(a))(f'(a)(h))$ pro $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Y$, pokud příslušné výrazy mají smysl. (Návod: $g \circ f(a+h) - g \circ f(a) = g(f(a+h)) - g(f(a)) = g'_F(f(a))(f(a+h) - f(a)) + o(f(a+h) - f(a)) = g'_F(f(a))(f'_F(a)(h) + o(h)) + o(f'_F(a)(h)) + o(h) = g'_F(f(a))(f'_F(a)(h)) + o(h)$. Užijte toho, že derivace v bodě jsou spojitými lineárními, a tedy lipschitzovskými, zobrazeními.)

Tvrzení 1.2. *Je-li $\dim X < \infty$ a $f : G \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ lokálně lipschitzovská na otevřené množině $G \subset X$, pak $f'_G(x)$ existuje, právě když $f'_F(x)$ existuje.*

2. PŘÍKLADY DERIVACÍ NOREM

Pro lineární operátor $L \in L(X, Y)$ je $L'_F(h) = L(h)$.

Příklad 2.1. *Norma na Hilbertově prostoru X splňuje $\|x\|'_F(h) = \langle h, \frac{x}{\|x\|} \rangle$ pro $x \neq 0$ a $h \in X$, tj. $\|x\|'_F = \frac{x}{\|x\|}$ ve smyslu duality $x \in X \mapsto \langle \cdot, x \rangle \in X^*$ na Hilbertově prostoru.*

Návod: Pro $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \|x+h\| - \|x\| &= (\|x+h\|^2 - \|x\|^2) \frac{1}{\|x+h\| + \|x\|} = \frac{2\langle h, x \rangle}{\|x+h\| + \|x\|} + \frac{\|h\|^2}{\|x+h\| + \|x\|} = \\ &= 2\langle h, x \rangle \left[\frac{1}{2\|x\|} + \frac{1}{\|x+h\| + \|x\|} - \frac{1}{2\|x\|} \right] + O(\|h\|^2) = \langle h, \frac{x}{\|x\|} \rangle + O(\|h\|)o(1) + o(\|h\|) = \\ &= \langle h, \frac{x}{\|x\|} \rangle + o(\|h\|). \end{aligned}$$

Lze též dokázat, že $\langle x+h, x+h \rangle - \langle x, x \rangle = 2\langle h, x \rangle + \|h\|^2 + o(\|h\|) = (\langle x, x \rangle)'_F(h) + o(\|h\|)$ a užitím derivace složené funkce spočítat $(\sqrt{\langle x, x \rangle})'_F(h) = (1/(2\|x\|))(2\langle h, x \rangle) = \langle h, \frac{x}{\|x\|} \rangle$.

Příklad 2.2. Norma na ℓ_1 splňuje:

- (a) pokud $x_n = 0$ pro nějaké n , pak neexistuje $\partial_{e_n} \|\cdot\|(x)$, tedy ani $\|\cdot\|'_G(x)$;
- (b) $\|\cdot\|'_G(x) = (\text{sgn } x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty \equiv (\ell_1)^*$, pokud $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$;
- (c) $\|\cdot\|'_F(x)$ neexistuje v žádném $x \in \ell_1$.

Konec 1. přednášky

Důkazy (a), (b) a (c).

Příklad 2.3. Na $\ell_1(\Gamma)$ neexistuje $\|\cdot\|'_G(x)$ v žádném $x \in \ell_1(\Gamma)$, pokud je Γ nespočetný.

Příklad 2.4. Na $C(K)$ pro K kompaktní platí:

- (a) $\|\cdot\|'_G(x)$ existuje, právě když $\|x\| = |x(t)| \neq 0$ v jediném $t \in K$;
- (b) $\|\cdot\|'_F(x)$ existuje, právě když $\|x\| = |x(t)| \neq 0$ v jediném $t \in K$ a t je izolovaný v K ;
- (c) pokud derivace existuje, platí $\|x\|'_G(h) = h(t)\text{sgn } x(t)$, tj. $\|x\|'_G = (\text{sgn } x)\delta_t \in M(K)$, kde t je bod, ve kterém $|x|$ nabývá maxima.

Speciální případy ℓ_∞ s $C(\beta\mathbb{N})$ a $C(\alpha\mathbb{N})$ s c_0 .

Konec 2. přednášky

3. KONVEXNÍ FUNKCE A JEJICH SPOJITOST

Příklad zdola omezené nespojité konvexní funkce.

Lemma 3.1. Je-li $x \in X$, $r > 0$, f konvexní a omezená shora na $B(x, r)$, je Lipschitzovská na $B(x, \frac{r}{2})$.

Tvrzení 3.2. Pro (lokálně) konvexní funkci f na otevřené $G \subset X$ jsou následující výroky ekvivalentní:

- (a) f je spojitá na G ;
- (b) f je lokálně shora omezená na G ;
- (c) f je lokálně Lipschitzovská na G .

Důsledek 3.3. Je-li $\dim X < \infty$ a f je konvexní na otevřené konvexní $D \subset X$, je lokálně shora omezená, a tedy lokálně Lipschitzovská na D .

Konec 3. přednášky

4. KONVEXNÍ FUNKCE A JEJICH SUBDIFERENCIÁL

Lemma 4.1 ($o \ h \mapsto \partial_h^+ f(x)$). Je-li f spojitá konvexní na otevřené konvexní množině $G \subset X$ a $x \in G$, je reálná funkce $h \in X \mapsto \partial_h^+ f(x)$ pozitivně homogenní, subaditivní a lokálně Lipschitzovská na X .

Tvrzení 4.2 (o existenci subdiferenciálu). *Je-li $f : G \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá konvexní na otevřené konvexní $G \subset X$, pak pro každé $x \in G$ existuje $x^* \in X^*$, které splňuje*

$$x^*(h) \leq f(x+h) - f(x),$$

ekvivalentně, které splňuje $x^(h) \leq \partial_h^+ f(x)$ pro $h \in X$.*

Pojem subdiferenciálu ∂f konvexní funkce.

Věta 4.3 (hodnoty a lokální omezenost subdiferenciálu). *Je-li f spojitá konvexní funkce na otevřené konvexní množině G , je $\partial f(x)$ neprázdná w^* -kompaktní množina pro $x \in G$. Zobrazení $x \mapsto \partial f(x)$ je "lokálně omezené" (každé $x \in G$ má okolí $U \subset G$ takové, že $\bigcup \{\partial f(x) : x \in U\}$ je omezená v X^*).*

Důkaz věty.

5. GÂTEAUXOVA DERIVACE KONVEXNÍ FUNKCE A JEJÍ SUBDIFERENCIÁL

Lemma 5.1 (f'_G a jednostranné derivace). *Je-li f spojitá konvexní funkce na otevřené konvexní množině G a $x \in G$, pak Gâteauxova derivace $f'_G(x)$ existuje, právě když pro každé $h \in X$ platí $\partial_h^+ f(x) = \partial_h^- f(x)$. Ekvivalentně $h \mapsto \partial_h^+ f(x)$ je lineární.*

Konec 4. přednášky

Poznámka. Existuje-li $f'_G(x)$, je to $h \mapsto \partial_h^+ f(x)$ z definice.

Tvrzení 5.2 (subdiferenciál a Gâteauxova derivace). *Je-li f spojitá konvexní funkce na otevřené konvexní množině G a $x \in G$, pak Gâteauxova derivace $f'_G(x)$ existuje, právě když $\partial f(x)$ je jednoprvková.*

6. FRÉCHETOVA DERIVACE KONVEXNÍ FUNKCE A JEJÍ SUBDIFERENCIÁL

Připomenutí pojmů mnohoznačného zobrazení topologického prostoru T do topologického prostoru Y , jeho polospojivosti shora, zdola, resp. spojitosti v bodě.

Tvrzení 6.1 (subdiferenciál a Fréchetova derivace). *Pro f spojitou konvexní $f'_F(x)$ existuje, právě když*

$\partial f(x)$ je jednoprvková a ∂f je v x shora polospojité (zde ekvivalentně spojitě) vzhledem k normovým topologiím na X i na X^ .*

Speciálně, f'_F je spojitě z X do X^ vzhledem k normám na svém definičním oboru.*

Lemma 6.2 (f' a jednostranné difference). *Spojitá konvexní funkce f na otevřené konvexní $G \subset X$*

(a) *má Gâteauxovu derivaci v $x \in G$, právě když*

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{1}{t} (f(x+th) - f(x-th) - 2f(x)) = 0$$

bodově v $h \in S_X$, tj. pro každé $h \in S_X$.

(b) *má Fréchetovu derivaci v $x \in G$, právě když*

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{1}{t} (f(x+th) - f(x-th) - 2f(x)) = 0$$

stejněměrně vzhledem k $h \in S_X$.

Konec 5. přednášky

Věta 6.3 (definiční obor f'_F). *Pro $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ spojitou konvexní na otevřené konvexní G označme D množinu bodů $x \in X$, ve kterých existuje $f'_F(x)$. Pak D je typu G_δ a $f'_F : D \rightarrow X^*$ je spojitá vzhledem k normám na X i X^* .*

Poznámka o množinách bodů gâteauxovské diferencovatelnosti.

7. MONOTÓNIE A POLOSPOJITOST SUBDIFERENCIÁLU KONVEXNÍ FUNKCE

Definice pojmu *maximální monotónní mnohoznačné zobrazení*.

Věta 7.1 (subdiferenciál - "maximální monotónie"). *Je-li $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá konvexní na otevřené konvexní množině $G \subset X$, pak $\partial f : G \rightarrow \mathcal{P}(X^*)$ je maximální monotónní mnohoznačné zobrazení.*

Konec 6. přednášky

Definice pojmů *minimální shora polospojité kompaktně hodnotové zobrazení*, zkráceně "minimální usc - K " zobrazení a *minimální shora polospojité kompaktně a konvexně hodnotové zobrazení*, zkráceně "minimální usc - KK ".

Věta 7.2 (subdiferenciál - "minimální usc - KK "). *Je-li $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá konvexní na otevřené konvexní množině $G \subset X$, pak $\partial f : G \rightarrow \mathcal{P}(X^*)$ je minimální konvexně a kompaktně hodnotové shora polospojité zobrazení X do (X^*, w^*) (minimální usc - KK).*

Konec 7. přednášky

8. GÂTEAUXOVSKÁ DIFERENCOVATELNOST KONVEXNÍCH FUNKCÍ NA SEPARABILNÍCH PROSTORECH

Tvrzení 8.1 (množina jednohodnotovosti usc zobrazení). *Nechť X je separabilní Banachův prostor, T je topologický prostor a $\Phi : T \rightarrow (X^*, w^*)$ je minimální usc - KK zobrazení. Pak množina $G = \{t \in T : |\Phi(t)| = 1\}$ je reziduální a G_δ v T .*

Poznámka 8.2. *Předchozí tvrzení platí i pro minimální usc - K zobrazení (viz důkaz).*

Pojem *slabě Asplundova prostoru*.

Věta 8.3 (Mazur). *Separabilní Banachovy prostory jsou slabě Asplundovy. Navíc množina bodů gâteauxovské diferencovatelnosti je typu G_δ .*

Příklad: $\ell_1(\Gamma)$ není slabě Asplundův, pokud Γ není spočetná.

9. FRÉCHETOVSKÁ DIFERENCOVATELNOST KONVEXNÍCH FUNKCÍ NA PROSTORECH SE SEPARABILNÍM DUÁLEM

Tvrzení 9.1 (jednohodnotovost a spojitost mnohoznačného zobrazení). *Pokud duál X^* k Banachovu prostoru X je separabilní, T je Baireův topologický prostor a $\Phi : T \rightarrow (X^*, w^*)$ je minimální usc - KK zobrazení, je*

$$G_\Phi = \{t \in T : |\Phi(t)| = 1 \text{ a } \Phi \text{ je v } t \text{ usc do } (X^*, \|\cdot\|)\}$$

hustá typu G_δ v T .

Důsledek 9.2 (postačující podmínka pro fréchetovskou diferencovatelnost na separabilních prostorech). *V Banachově prostoru X se separabilním duálem je konvexní spojitá funkce definovaná na otevřené množině fréchetovsky diferencovatelná na její G_δ husté podmnožině.*

Pojem *Asplundova prostoru*.

Věta 9.3 (Asplund). *Je-li X separabilní a Banachův prostor, je Asplundův, právě když je X^* separabilní.*

Konec 9. přednášky

Poznámka. Separabilní Banachův prostor je Asplundův, pokud každá spojitá konvexní funkce f má Fréchetovu derivaci v *nějakém* bodě (viz důkaz předchozí věty).

Poznámka o Preissově a Zajíčkově zesílení Asplundovy věty.

Příklady:

1. Separabilní reflexivní prostory i prostor c_0 jsou Asplundovy.
2. Prostory ℓ_1 ani $C([0, 1])$ nejsou Asplundovy.

10. ASPLUNDOVOST SEPARABILNÍCH PODPROSTORŮ IMPLIKUJE ASPLUNDOVOST

1. *Separabilita podprostorů implikuje asplundovost.*

Věta 10.1 (postačitelnost asplundovosti separabilních podprostorů). *Jsou-li separabilní podprostory Banachova prostoru X Asplundovy, je X Asplundův.*

Poznámka. Dále dokážeme, že podprostory Asplundových prostorů jsou Asplundovy. Za tím účelem budeme v dalších sekcích charakterizovat asplundovost vlastností, jejíž dědičnost je poměrně přímočará.

2. *w^* -fragmentovanost v X^* a její dědičnost.*

Motivace pro pojem fragmentovanosti: Ukázali jsme pro separabilní prostory, že neseparabilita duálu je ekvivalentní s existencí diskrétní omezené množiny D bez w^* -izolovaných bodů v duálu. Zároveň je ekvivalentní neasplundovosti separabilního prostoru.

Pojem *w^* -fragmentovanosti* prostoru X^* .

Věta 10.2 (dědičnost w^* -fragmentovanosti duálu na podprostory). *Je-li X^* w^* -fragmentovaný, pak totéž platí pro všechny podprostory Y prostoru X .*

Konec 10. přednášky

3. *Vyvození fragmentovanosti z diferencovatelnosti.*

Věta 10.3 (asplundovost implikuje fragmentovanost duálu). *Pokud X je Asplundův, je jeho duál w^* -fragmentovaný.*

Navíc, pokud pro všechny normy na $(X, \|\cdot\|)$ ekvivalentní s $\|\cdot\|$ existuje bod Fréchetovy diferencovatelnosti, pak pro $\varepsilon > 0$ má každá omezená neprázdná $M \subset X^*$ " w^* -slice" $\{x^* \in M : x^*(x) > r\}$, který je neprázdný s diametrem menším než ε .

4. *Vyvození diferencovatelnosti z fragmentovatelnosti.*

Věta 10.4 (fragmentovanost duálu a body jednoznačnosti a normové spojitosti mnohoznačných zobrazení). *Je-li X^* w^* -fragmentovaný a $\Psi : T \rightarrow (X^*, w^*)$ je lokálně omezené minimální usc- KK , pak*

$$D_\Psi = \{t \in T : |\Psi(t)| = 1 \text{ \& } \Psi \text{ je usc-}K \text{ do normy v } t\}$$

je reziduální.

Speciálně (aplikací na subdiferenciály spojitých konvexních funkcí na X) dostáváme, že každý Banachův prostor X s w^* -fragmentovaným duálem X^* je Asplundův.

Náznak postupu důkazu.

1. Je-li Ψ jako ve znění věty, pak existuje mezi usc- K zobrazeními $\Phi : T \rightarrow (X^*, w^*)$, pro která $\Phi \subset \Psi$, zobrazení Φ_0 , které je minimálním usc- K zobrazením.

2. Pro minimální usc- K zobrazení Φ_0 z 1. definuje $\Phi_0^*(t) = \text{conv}^{w^*}(\Phi_0(t))$ usc- KK zobrazení. Speciálně je $\text{conv}^{w^*}\Phi(t) = \Psi(t)$ a množina D_{Φ_0} je podmnožinou D_Ψ .

3. Je-li $\Phi_0 : T \rightarrow (X^*, w^*)$ usc- K mnohoznačné zobrazení z 1., je D_{Φ_0} reziduální. Z bodů 1., 2., 3. dostáváme, že D_Ψ je reziduální. Speciálně, Banachův prostor $T = X$ je Baireův, a tedy dostáváme z w^* -fragmentovanosti X^* asplundovost X .

Konec 11. přednášky

11. CHARAKTERIZACE (VLASTNOSTI, PŘÍKLADY A ZACHOVÁVÁNÍ) ASPLUNDOVÝCH PROSTORŮ

Věta 11.1 (charakterizace asplundovosti). *Nechť X je Banachův prostor. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

- (a) X je Asplundův prostor.
- (a') Všechny ekvivalentní normy na X mají bod fréchetovské diferencovatelnosti.
- (b) neprázdné omezené množiny v X^* mají libovolně malé neprázdné w^* -slajsy.
- (b') neprázdné omezené množiny v X^* mají libovolně malé neprázdné w^* -fragmenty.
- (b'') neprázdné omezené množiny v Y^* mají libovolně malé neprázdné w^* -fragmenty, pro každý Banachův podprostor Y prostoru X ;
- (c) pro každý Banachův podprostor Y prostoru X a pro každé minimální usc- K lokálně omezené zobrazení $\Phi : T \rightarrow (Y^*, w^*)$ na Baireově prostoru T je množina

$$\{t \in T : |\Phi(t)| = 1 \text{ a } \Phi \text{ je usc v } t \text{ do } \|\cdot\|\}$$

hustá a G_δ v T .

- (c') Pro každý Banachův podprostor Y prostoru X a pro každé minimální usc- KK lokálně omezené zobrazení $\Phi : T \rightarrow (Y^*, w^*)$ na Baireově prostoru T je množina

$$\{t \in T : |\Phi(t)| = 1 \text{ a } \Phi \text{ je usc v } t \text{ do } \|\cdot\|\}$$

hustá a G_δ v T .

- (d) Banachovy podprostory prostoru X jsou Asplundovy.
- (d') Separabilní Banachovy podprostory prostoru X jsou Asplundovy.

Příklady:

- 1. Reflexivní prostory i prostor $c_0(\Gamma)$, kde Γ je libovolná množina, jsou Asplundovy.
- 2. Prostor $\ell_1(\Gamma)$, kde Γ je nekonečná, není Asplundův.

Věta 11.2 (zachovávání asplundovosti).

- (a) Banachův podprostor Asplundova prostoru je Asplundův.
- (b) Kvocient Asplundova prostoru je Asplundův.

Věta 11.3 (charakterizace asplundovosti prostorů spojitých funkcí). *Nechť K je kompaktní Hausdorffův prostor. Pak $C(K)$ je Asplundův prostor, právě když každá neprázdná podmnožina M prostoru má izolovaný bod, tj. K je scattered.*

Konec 12. přednášky

Topologické metody ve funkcionální analýze - otázky ke zkoušce - jaro 2025

Derivace normy na Hilbertových prostorech.

Derivace normy na prostorech $\ell_1(\Gamma)$.

Konvexní funkce, jejich omezenost, spojitost a lipschitzovskost.

Vztah Gâteauxovy a Fréchetovy derivace pro konvexní funkce na $\mathbb{R}^n$.

Vlastnosti směrových derivací konvexních funkcí a subdiferenciál.

Vlastnosti hodnot subdiferenciálu konvexní funkce.

Subdiferenciál a gâteauxovská diferencovatelnost.

Subdiferenciál a Fréchetova derivace.

Množina bodů fréchetovské diferencovatelnosti spojitých konvexních funkcí.

Asplundovost prostorů $c_0(\Gamma)$ a $\ell_1(\Gamma)$.

Maximální monotonní subdiferenciálu konvexní funkce.

Minimální polospojité usc- KK pro subdiferenciál konvexní funkce.

Slabá asplundovost separabilních prostorů.

Asplundovost prostorů se separabilním duálem.

Separabilní Asplundův prostor má separabilní duál.

Jsou-li separabilní podprostory prostoru X Asplundovy, je X Asplundův.

w^* -fragmentovanost duálu X^* se dědí pro duály podprostorů.

Asplundovost prostoru implikuje w^* -fragmentovanost duálu (silnější verze se slajsy).

Asplundovost všech podprostorů plyne z fragmentovanosti duálu (dědičnost).

Kvociet a podprostor Asplundova prostoru.

Charakterizace asplundovosti prostoru $C(K)$.