Zkoušky z NMMA104, letní semestr 2024/2025

Obecné podmínky

Nutnou podmínkou ke skládání zkoušky je získání zápočtu. Pokud student nezískal zápočet před konáním zkoušky, může jej dostat i za úspěšné napsání písemné části, pokud bude ohodnocena alespoň 30 body.

Zkouška se skládá z písemné a ústní části, písemná část předchází ústní části. Pokud student neuspěl u písemné části, neprospěl u tohoto termínu. Pokud student uspěl u písemné části, skládá ústní zkoušku. Pokud student třikrát neuspěl u písemné části, může jít stejně k ústní zkoušce a počítá se mu nejlepší výsledek písemky. V tom případě musí z ústní zkoušky získat více bodů, aby byl celkový součet písemné a ústní části alespoň 50 bodů.

Písemná část zkoušky

Písemná část zkoušky se skládá ze čtyřech příkladů, za které lze získat celkem 50 bodů. Příklady jsou vybrány z okruhů

1) stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí nebo mocninná řada (12 bodů)
2) stejnoměrná konvergence řady funkcí (typicky kde je řada spojitá, diferencovatelná funkce) (16 bodů)
3) Fourierovy řady (12 bodů)
4) teoretický příklad (10 bodů)

Písemná část trvá 120 minut. Student může používat donesenou literaturu (učebnice, poznámky, zápisky ze cvičení), nelze používat mobilní telefony, kalkulačky ani jinou výpočetní techniku. Při písemné i ústní části zkoušky se student prokáže dokladem totožnosti.

Student uspěje u písemné části, pokud je jeho celkový výsledek alespoň 25 bodů.

Vzor zadání písemky

1) (12 bodů) Sečtěte

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}.$$

2) (16 bodů) Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stějnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x}{n^2+x^2}.$$

Je funkce daná součtem řady spojitá na $\mathbf{R}$?

3) (12 bodů) Nalezněte $2\pi-$periodickou funkci f, která je na intervalu $[-\pi, 0)$ dána předpisem

$$f(x) = -x - \pi.$$

a má sinovou Fourierovu řadu. Tuto Fourierovu řadu spočtěte. K čemu konverguje tato řada bodově a na kterých intervalech konverguje stejnoměrně?

4) (10 bodů) Nechť $f, g : [0,1] \to \mathbf{R}$. Rozhdněte o platnosti následujícího tvrzení:
a) Nechť $f, g \in BV([0,1])$, pak $f(x) \cdot g(x) \in BV([0,1])$.
b) Nechť $f, g \in AC([0,1])$, pak $f(x) \cdot g(x) \in AC([0,1])$.
c) Nechť $f, g \in BV([0,1])$, pak $f(g(x)) \in BV([0,1])$.

Místo 1) může být například:

1') (10 bodů) Na $[0, \infty)$ vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = n^2 x^2 e^{-nx} \ .$$

Nalezněte všechny co největší intervaly, na nichž řada konverguje stejnoměrně popřípadě lokálně stejnoměrně.

Ústní část zkoušky

Během zkouškového období bude vypsáno minimálně 5 termínů pro ústní zkoušku a právě jeden termín bude vypsán v září. Student si na zkoušce vylosuje sadu čtyř otázek. Po zhruba 30 minutách na přípravu začíná zkoušení. Pokud nemá student ještě nějaké otázky vypracované, tak dostane po prozkoušení již připraveného čas na jejich dokončení. K vypracování odpovědí nelze používat jiné pomůcky než psací potřeby. Odpovědi jsou zhodnoceny a obodovány zkoušejícím.
Skladba otázek a počty bodů :

1) Klíčový pojem (neboduje se)
2) Tři definice nebo znění věty (každá otázka za 4 body)
3) Lehká věta a důkaz (4 body za znění a 8 bodů za důkaz)
4) Těžká věta a důkaz (4 body za znění a 12 bodů za důkaz)

Seznamy klíčových pojmů, definic, lehkých a težkých vět budou k dispozici na konci semestru. Za nezbytnou součást znalosti definic respektive vět se považuje jejich porozumění a schopnost je používat. Nezbytnou podmínkou ke složení zkoušky je znalost klíčového pojmu a získání alespoň 25 bodů z této části ústní části.

Pokud je součet bodů za písemnou a ústní část alespoň 60 bodů, dostane student ještě doplňkovou otázku na implikace za maximálně 10 bodů.

Vzor zadání otázek

Ústní zkouška:

1) stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí (0 bodů)
2) křivkově souvislý metrický prostor, Moore-Osgood, Riemannovo–Lebesgueovo lemma (12 bodů)
3) vztah omezené variace a monotonie (12 bodů)
4) Fejérova věta (16 bodů)

Implikace:

I) Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí? Příslušná tvrzení dokažte, nebo uveďte protipříklad.

(1) Posloupnost $\{a_n\}$ je monotónní.
(2) Posloupnost $\{a_n^2\}$ je monotónní.
(3) Posloupnost $\{a_n\}$ má limitu.

POZOR: Vzhledem k tomu, že ve 4. semestru samotném není dost vhodných jednoduchých pojmů, tak mohou být implikace na (základní) pojmy z předchozích semestrů.

Celkové hodnocení zkoušky

1) Nezbytnou podmínkou ke složení zkoušky je znalost klíčového pojmu.
2) Student složí zkoušku, pokud získá alespoň 25 bodů z písemné zkoušky, alespoň 25 bodů z ústní zkoušky a prokáže znalost klíčového pojmu.
3) K celkovému hodnocení známkou výborně je potřeba získat alespoň 85 bodů, z toho alespoň 25 bodů za písemnou a alespoň 25 bodů za ústní část.
4) K celkovému hodnocení známkou velmi dobře je potřeba získat alespoň 70 bodů, z toho alespoň 25 bodů za písemnou a alespoň 25 bodů za ústní část.