Zkoušky z NMMA103, zimní semestr 2024/2025

Obecné podmínky

Během semestru budou dvě zápočtové písemky a každá z nich za maximálně 25 bodů. Nutnou podmínkou ke skládání zkoušky je získání zápočtu. Pokud student nezískal zápočet před konáním zkoušky, může jej dostat i za úspěšné napsání písemné části, pokud bude ohodnocena alespoň 30 body.

Zkouška se skládá z písemné a ústní části, písemná část předchází ústní části. Pokud student neuspěl u písemné části, neprospěl u tohoto termínu. Pokud student uspěl u písemné části, skládá ústní zkoušku. Pokud student třikrát neuspěl u písemné části, může jít stejně k ústní zkoušce a počítá se mu nejlepší výsledek písemky. V tom případě musí z ústní zkoušky získat více bodů, aby byl celkový součet písemné a ústní části alespoň 50 bodů.

Písemná část zkoušky

Písemná část zkoušky se skládá ze čtyřech příkladů, za které lze získat celkem 50 bodů. Příklady jsou vybrány z okruhů

1) soustava ODR (10 nebo 15 bodů)

2) (totální diferenciál) nebo (implicitní funkce) nebo (lokální extrémy) (10 nebo 15 bodů)

3) extrémy funkcí více proměnných (vázané extrémy) (15 bodů)

4) teoretický příklad (10 bodů)

Písemná část trvá 120 minut. Student může používat donesenou literaturu (učebnice, poznámky, zápisky ze cvičení), nelze používat mobilní telefony, kalkulačky ani jinou výpočetní techniku. Při písemné i ústní části zkoušky se student prokáže dokladem totožnosti.

Student uspěje u písemné části, pokud je jeho celkový výsledek alespoň 25 bodů.

Vzor zadání písemky

1) (15 bodů) Nalezněte maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$y' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} y$$

splňující počáteční podmínku $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) (10 bodů) Dokažte, že existuje okolí bodu $x = 1$ a na něm funkce $y(x)$ a $z(x)$ tak, že $y(1) = 1$, $z(1) = 1$,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad \text{a} \quad xyz^2 = 1.$$

V tomto bodě spočtěte $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

3) (15 bodů) Nalezněte globální extrémy funkce $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definované

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

na množině

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 5, \ yz = 2\}.$$

4) (10 bodů) Mějme $\mathbf{R}$ s klasickou Euklidovskou metrikou. Rozhdněte o platnosti následujícího tvrzení:

a) Nechť $K = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n}\}$. Pak existuje spojitá funkce $f : K \to \mathbf{R}$, která na K nenabývá svého maxima.

b) Nechť $K = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n}\}$. Pak existuje spojitá funkce $f : K \to \mathbf{R}$, která na K nenabývá svého maxima.

c) Nechť $K \subset \mathbf{R}$ a každá spojitá funkce $f : K \to \mathbf{R}$ nabývá na K svého maxima. Pak K je kompaktní.

Místo 2) může být například:

2') (10 bodů) Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$g(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \text{ na množině } M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2 : \ x > 0, y > 0\}.$$

nebo

2") U následujících funkce nalezněte spojité rozšíření na $\mathbf{R}^2$, spočtěte parciální derivace a totální diferenciál všude, kde existují

$$\frac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Ústní část zkoušky

Během zkouškového období bude vypsáno minimálně 5 termínů pro ústní zkoušku a právě jeden termín bude vypsán v září. Student si na zkoušce vylosuje sadu čtyř otázek. Po zhruba 30 minutách na přípravu začíná zkoušení. Pokud nemá student ještě nějaké otázky vypracované, tak dostane po prozkoušení již připraveného čas na jejich dokončení. K vypracování odpovědí nelze používat jiné pomůcky než psací potřeby. Odpovědi jsou zhodnoceny a obodovány zkoušejícím.

Skladba otázek a počty bodů :

1) Klíčový pojem (neboduje se)
2) Tři definice nebo znění věty (každá otázka za 4 body)
3) Lehká věta a důkaz (4 body za znění a 8 bodů za důkaz)
4) Těžká věta a důkaz (4 body za znění a 12 bodů za důkaz)

Seznamy klíčových pojmů, definic, lehkých a težkých vět budou k dispozici na konci semestru. Za nezbytnou součást znalosti definic respektive vět se považuje jejich porozumění a schopnost je používat. Nezbytnou podmínkou ke složení zkoušky je znalost klíčového pojmu a získání alespoň 25 bodů z této části ústní části.

Pokud je součet bodů za písemnou a ústní část alespoň 60 bodů, dostane student ještě doplňkovou otázku na implikace za maximálně 10 bodů.

Vzor zadání otázek

Ústní zkouška:

1) metrický prostor (0 bodů)
2) Hessova matice, o implicitní funkci, kompaktnost a otevřené pokrytí (12 bodů)
3) charakterizace spojitosti (12 bodů)
4) diferenciál složeného zobrazení (16 bodů)

Implikace:

I) Nechť $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ je funkce. Které implikace mezi následujícími tvrzení platí? Příslušná tvrzení dokažte, nebo sestrojte protipříklad.

(1) Existuje $\delta > 0$, že f je C^1 na $B([0, 0], \delta)$.
(2) Existuje $\delta > 0$, že f má totální diferenciál na $B([0, 0], \delta)$.
(3) Existuje $\delta > 0$, že funkce $t \to f(t, b|t|^a)$ je C^1 na $[-\delta, \delta]$ pro každé $a, b \in \mathbf{R}$.

Celkové hodnocení zkoušky

1) Nezbytnou podmínkou ke složení zkoušky je znalost klíčového pojmu.
2) Student složí zkoušku, pokud získá alespoň 25 bodů z písemné zkoušky, alespoň 25 bodů z ústní zkoušky a prokáže znalost klíčového pojmu.
3) K celkovému hodnocení známkou výborně je potřeba získat alespoň 85 bodů, z toho alespoň 25 bodů za písemnou a alespoň 25 bodů za ústní část.
4) K celkovému hodnocení známkou velmi dobře je potřeba získat alespoň 70 bodů, z toho alespoň 25 bodů za písemnou a alespoň 25 bodů za ústní část.

Seznam klíčových pojmů

- otevřená a uzavřená množina v metrickém prostoru
- kompaktní podmnožina (P, ρ)
- BC podmínka a úplný metrický prostor
- parciální derivace funkce f v bodě x podle i-té proměnné
- totální diferenciál funkce f v bodě a
- prostor L^p a L^∞
- hustá a řídká podmnožina metrického prostoru
- Hilbertův prostor
- Fourierovy koeficienty funkce f a trigonometrická řada
- separabilní metrický prostor

Definice

- $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k x v (P, ρ)
- spojitost $f : P \to Q$ pro metrické prostory (P, ρ) a (Q, σ)
- stejnoměrně spojitá funkce na metrickém prostoru
- limita a spojitost pro funkci více reálných proměnných
- derivace ve směru
- gradient funkce f v bodě a
- derivace funkce $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ v bodě a
- parciální derivace vyšších řádů
- třídy funkcí C^1 a C^k
- Hessova matice $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$
- Taylorův polynom f druhého řádu
- difeomorfismus a regulární zobrazení
- ε-síť a totálně omezený metrický prostor
- množina 1. a 2. kategorie
- konvexní podmnožina (Hilbertova prostoru)
- ortogonální podprostor
- ortogonální a ortogonální množina, Fourierovy koeficienty
- báze otevřených množin

Lehké věty

Ještě budou vyřazeny 3 důkazy podle přání studentů (znění je potřeba umět).

- vlastnosti konvergence
- charakterizace spojitosti
- spojitost složeného zobrazení
- Heine
- charakterizace uzavřených množin
- vlastnosti kompaktních množin
- nabývání extrémů na kompaktu
- spojitý obraz kompaktu
- vztah kompaktnosti a úplnosti
- o převedení na integrální tvar
- nutná podmínka existence extrému
- o tvaru totálního diferenciálu
- geometrický význam gradientu
- o vztahu spojitosti a totálního diferenciálu
- reprezentace derivace maticí
- řetízkové pravidlo
- o přírůstku funkce
- o pozitivně definitní kvadratické formě

- omezenost a totální omezenost
- kompaktnost a totální omezenost
- Cantorova věta o vnořených množinách
- Jensenova nerovnost
- Trojúhelníková nerovnost v L^p
- charakterizace hustých množin
- vlastnosti řídkých množin
- Schwarzova nerovnost
- trojúhelníková nerovnost (v Hilbertově prostoru)
- o reprezentaci lineárního funkcionálu
- o konečné ortonormální množině
- Riesz-Fischerova věta
- o ortogonalitě trigonometrických funkcí
- nutná podmínka separability
- charakterizace separabilních prostorů
- vztah totální omezenosti a separability

Těžké věty

Ještě budou vyřazeny 2 důkazy podle přání studentů (znění je potřeba umět).

- charakterizace kompaktních množin $\mathbf{R}^n$
- o vztahu spojitosti a stejnoměrné spojitosti na metrickém prostoru
- úplnost a prostor spojitých funkcí
- Banachova věta o kontrakci
- Picard
- postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu
- derivace složeného zobrazení
- záměnnost parciálních derivací
- postačující podmínky pro lokální extrém
- o implicitní funkci
- o implicitních funkcích - BD
- Lagrangeova věta o vázaných extrémech
- o lokálním difeomorfismu
- kompaktnost a otevřené pokrytí
- o totální omezenosti a úplnosti
- Arzela-Ascoli
- Hölderova a Minkovského nerovnost
- Úplnost L^p prostorů - důkaz jen pro $p < \infty$ - pro MIT BD
- Baire
- o nediferencovatelné funkci
- o projekci na podprostor
- o maximální ortonormální množině
- o maximalitě trigonometrických funkcí - BD