13. Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí

13.1. Bodová a stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí

Definice. Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je interval a nechť máme funkce $f : J \to \mathbf{R}$ a $f_n : J \to \mathbf{R}$ pro $n \in \mathbf{N}$. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$:

- *konverguje bodově* k f na J, pokud pro každé $x \in J$ platí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, neboli
$$\forall x \in J\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \geq n_0 :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
Značíme $f_n \to f$ na J.
- *konverguje stenoměrně* k f na J, pokud
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in J :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
Značíme $f_n \rightrightarrows f$ na J.
- *konverguje lokálně stejnoměrně*, pokud pro každý omezený uzavřený interval $[a,b] \subset J$ platí: $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$. Značíme $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na J.

Příklady: 1) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{2^n}$ na $[0,1]$.
2) $f_n(x) = x^n$ na $[0,1]$.

Věta L 13.1 (kritérium stejnoměrné konvergence)**.** *Nechť* $f, f_n : J \to \mathbf{R}$. *Pak*
$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } J \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)|;\ x \in J\} = 0.$$

Poznámka: Nechť $f_n, f : J \to \mathbf{R}$ jsou navíc spojité. Pak předchozí věta říká, že
$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow f_n \to f \text{ v metrickém prostoru } C(J).$$

Příklady: 1) $f_n(x) = x^n$ na $[0,1]$.
2) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ na $[0,1]$.
3) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ na $[0,1]$.

Věta L 13.2 (Bolzano-Cauchyho podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)**.** *Nechť* $f_n : J \to \mathbf{R}$. *Pak*
$$f_n \rightrightarrows \text{ na } J \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J :\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Konec 1. přednášky 15.2.

Věta L 13.3 (Moore-Osgood)**.** *Nechť x_0 je krajní bod intervalu J (může být i $\pm\infty$). Nechť $f, f_n : J \to \mathbf{R}$ splňují*

(*i*) $f_n \rightrightarrows f$ *na* J,
(*ii*) *existuje* $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbf{R}$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$.

Pak existují $\lim_{n\to\infty} a_n$ *a* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *a jsou si rovny, neboli*
$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Důsledek: Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na I a nechť f_n jsou spojité na I. Pak f je spojitá na I.

Poznámka: Nechť $A \subset \mathbf{R}^n$. Analogicky lze definovat stejnoměrnou konvergenci i pro funkce $f_n : A \to \mathbf{R}$ a platí, že stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá funkce.

Příklad: 1) $f_n(x) = x^n$ na $[0,1]$.

Věta T 13.4 (o záměně limity a derivace)**.** *Nechť funkce f_n, $n \in \mathbf{N}$, mají vlastní derivaci na intervalu (a,b) a nechť*

(*i*) *existuje $x_0 \in (a,b)$ tak, že $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje* ,
(*ii*) *pro derivace f_n' platí $f_n' \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na (a,b).*

Potom existuje funkce f tak, že $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na (a,b), f má vlastní derivaci a platí $f_n' \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f'$ na (a,b).

Příklady: 1) $f_n(x) = n$ na $[0,1]$, bez (i) věta neplatí.
2) $f_n(x) = \frac{1}{n}x$ na $\mathbf{R}$. Dostaneme pouze $f_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ a ne $f_n(x) \rightrightarrows 0$.

13.2. Stejnoměrná konvergence řady funkcí

Definice. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konverguje *stejnoměrně* (popřípadě *lokálně stejnoměrně*) na intervalu J, pokud posloupnost částečných součtů $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na J.

Věta L 13.5 (nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *je řada funkcí definovaná na intervalu* J*. Pokud* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows$ *na* J*, pak posloupnost funkcí* $u_n(x) \rightrightarrows 0$ *na* J*.*

Příklad: Řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$
není stejnoměrně konvergentní na $(0,1)$.

Konec 2. přednášky 22.2.

Věta L 13.6 (Weirstrassovo kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *je řada funkcí definovaná na intervalu* J*. Pokud pro*
$$\sigma_n := \sup\{|u_n(x)| : \ x \in J\} \text{ platí, že číselná řada } \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \text{ konverguje,}$$
pak $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows$ *na* J*.*

Příklad: Nechť $\alpha > 1$. Řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$$
je stejnoměrně konvergentní na $\mathbf{R}$.

Věta L 13.7 (o spojitosti a derivování řad funkcí)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *je řada funkcí definovaná na intervalu* (a,b)*.*

a) Nechť u_n *jsou spojité na* (a,b) *a nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ *na* (a,b)*. Pak* $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *je spojitá na* (a,b)*.*
b) Nechť funkce u_n*,* $n \in \mathbf{N}$*, mají vlastní derivaci na intervalu* (a,b) *a nechť*
$$(i) \text{ existuje } x_0 \in (a,b) \text{ tak, že } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ konverguje },$$
$$(ii) \text{ pro derivace } u_n' \text{ platí } \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} \text{ na } (a,b).$$
Potom je funkce $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *dobře definovaná a diferencovatelná a navíc* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} F(x)$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} F'(x)$ *na* (a,b)*.*

Příklad: Je funkce $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^3+x^3}$ spojitá a diferencovatelná na $(0,\infty)$?

Věta T 13.8 (Abel-Dirichletovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci - BD)**.** *Nechť* $\{a_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ *je posloupnost funkcí definovaných na intervalu* J *a nechť* $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost funkcí na* J *taková, že* $b_1(x) \geq b_2(x) \geq \dots 0$*. Jestliže je některá z následujících podmínek splněna, pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \rightrightarrows$ *na* J*.*
$$\text{(A) } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \rightrightarrows \text{ na } J \text{ a } b_1 \text{ je omezená,}$$
$$\text{(D) } b_n \rightrightarrows 0 \text{ na } J \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ má omezené častečné součty, tedy}$$
$$\exists K > 0 \ \forall m \in \mathbf{N} \ \forall x \in J : \quad |s_m(x)| = \Big|\sum_{i=1}^{m} a_i(x)\Big| < K.$$

Příklady: 1) Je funkce $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x}{n^2+x^2}$ spojitá na $[0,\infty)$?

Konec 3. přednášky 1.3.

2)Nechť $\alpha \in (0,1]$. Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí na $\mathbf{R}$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}.$$

13.3. Mocninné řady

Definice. Nechť $x_0 \in \mathbf{R}$ a $a_n \in \mathbf{R}$ pro $n \in \mathbf{N}_0$. Řadu funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ nazýváme *mocninnou řadou* s koeficienty a_n o středu x_0.

Motivace: Taylorovy řady jako $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ a podobně.

Definice. *Poloměrem konvergence* mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ nazveme

$$R = \sup\big\{r \in [0,\infty) : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ konverguje pro všechna } x \in [x_0 - r, x_0 + r]\big\}.$$

Věta L 13.9 (o poloměru konvergence mocniné řady)**.** *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada a $R \in [0,\infty]$ její poloměr konvergence. Pak řada konverguje absolutně pro všechna x taková, že $|x-x_0| < R$, a diverguje pro všechna x taková, že $|x-x_0| > R$. Navíc platí*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Pokud existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, pak $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Příklady: Určete poloměry konvergence řad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ a $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$.

Věta L 13.10 (o stejnoměrné konvergenci mocninné řady)**.** *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Pak řada konverguje lokálně stejnoměrně na $(x_0 - R, x_0 + R)$ (Je-li $R = \infty$, pak na celém $\mathbf{R}$).*

Věta L 13.11 (o derivaci mocninné řady)**.** *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ je také mocninná řada se stejným středem a poloměrem konvergence. Navíc pro $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ ($\mathbf{R}$ pro $R = \infty$) platí*

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}.$$

Důsledek(o integrování mocninné řady)**:** Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Pak $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ je také mocninná řada se stejným středem a poloměrem konvergence. Navíc platí

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + C \text{ na } (x_0 - R, x_0 + R).$$

Příklad: Spočtěte $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

Konec 4. přednášky 8.3.

Věta L 13.12 (Abelova)**.** *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Nechť navíc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konverguje. Pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje stejnoměrně na $[x_0, x_0 + R]$ a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{r\to R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Příklad: Sečtěte $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

14. Absolutně spojité funkce a funkce s konečnou variací

Všechny integrály v této kapitole jsou Lebesgueovy.

Motivace: 1. Pro které funkce platí $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$?
2. Pro které funkce platí per partes?
3. Nechť $h \in L^1(\mathbf{R})$. Můžeme něco říct o funkci $H(x) = \int_a^x h(t)\,dt$?

14.1. Derivace monotonní funkce

Definice. Nechť $x \in (a,b)$ a $f : (a,b) \to \mathbf{R}$. Definujme *limes superior* a *limes inferior* jako

$$\limsup_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0} \sup_{y\in(x-h,x+h)\setminus\{x\}} f(y) \text{ a } \liminf_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0} \inf_{y\in(x-h,x+h)\setminus\{x\}} f(y)$$

Poznámka: Analogicky jako pro posloupnosti platí věta:

$$\exists \lim_{h\to 0} f(x) \Leftrightarrow \limsup_{h\to 0} f(x+h) = \liminf_{h\to 0} f(x+h).$$

Definice. Nechť I je interval, x je vnitřní bod I a $f\colon I \to \mathbf{R}$ je funkce. Definujeme *horní a dolní derivaci* funkce f v bodě x následovně:

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ (horní derivace)},$$
$$\underline{D}f(x) = \liminf_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ (dolní derivace)}.$$

Příklad: Kolik je $\overline{D}f(0)$ a $\underline{D}f(0)$ pro $f_1 = \max\{0,x\}$ a $f_2(x) = x\sin\frac{1}{x}$.

Věta T 14.1 (míra vzoru a obrazu - BD)**.** *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je interval, Nechť $f\colon I \to \mathbf{R}$ je neklesající funkce, $M \subset I$ je měřitelná a $c > 0$.*
(a) *Je-li $\overline{D}f(x) > c$ na M, potom $\mathcal{L}^*(f(M)) \geq c\mathcal{L}(M)$.*
(b) *Je-li $\underline{D}f(x) < c$ na M, potom $\mathcal{L}^*(f(M)) \leq c\mathcal{L}(M)$.*

Věta L 14.2 (derivace monotónní funkce)**.** *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je interval a $f\colon I \to \mathbf{R}$ je monotónní funkce. Potom v skoro každém bodě $x \in I$ existuje $f'(x)$.*

Poznámka: a) Každá monotónní funkce z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.
b) Každá monotónní funkce z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}$ má nejvýše spočetně mnoho bodů intervalů konstantnosti.
c) Každá monotónní funkce je měřitelná.
Konec 5. přednášky 15.3.

Věta L 14.3 (integrál derivace monotónní funkce)**.** *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ a $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ je neklesající funkce. Potom f' je lebesgueovsky integrovatelná na $[a,b]$ a platí*

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leq f(b) - f(a).$$

14.2. Funkce s konečnou variací

Definice. Nechť $[a,b] \subset \mathbf{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Definujme veličiny

- $V^+(f;a,b) := \sup_D \left\{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+\right\}$ (kladná variace),
- $V^-(f;a,b) := \sup_D \left\{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^-\right\}$ (záporná variace),
- $V(f;a,b) := \sup_D \left\{\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|\right\}$ (totální variace),

kde supremum bereme přes všechna dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a,b]$ tvaru $a = x_0 < \cdots < x_n = b$. Dále zaveme značení

$$V_f^+(x) = V^+(f;a,x),$$
$$V_f^-(x) = V^-(f;a,x),$$
$$V_f(x) = V(f;a,x).$$

Řekneme, že funkce f má na intervalu $[a,b] \subset \mathbf{R}$ *konečnou variaci*, jestliže $V(f;a,b) < \infty$. Množinu všech funkcí s konečnou variací na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathrm{BV}([a,b])$.

Příklad: Mezi třídami $\mathrm{BV}([a,b])$ a $C([a,b])$ není vztah. Funkce $x\sin\frac{1}{x^2}$ dodefinovaná nulou v nule je spojitá, ale nemá konečnou variaci na $[0,1]$. Charakteristická funkce intervalu $[0,1]$ má konečnou variaci, ale není spojitá na $[-1,1]$.

Poznámky: Nechť $[a,b] \subset \mathbf{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Potom
(a) je-li f neklesající na $[a,b]$, pak $V(f;a,b) = V^+(f;a,b) = f(b) - f(a)$, tedy f má konečnou variaci na $[a,b]$.
(b) $V(f;a,b) \geq |f(a) - f(b)|$;
(c) je-li $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, pak $V(f;a,b) = \sum_{i=1}^n V(f;x_{i-1},x_i)$;

Věta T 14.4 (vztah omezené variace a monotonie)**.** *Nechť $[a,b] \subset \mathbf{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a,b] \to \mathbf{R}$.*
(a) *Má-li f konečnou variaci na $[a,b]$, potom $V_f(x) = V_f^+(x) + V_f^-(x)$ a $f(x) - f(a) = V_f^+(x) - V_f^-(x)$.*
(b) *$f \in \mathrm{BV}(a,b)$ právě tehdy, když existují neklesající funkce u, $v : [a,b] \to \mathbf{R}$ takové, že $f = v - u$ na $[a,b]$.*

Důsledek: Nechť $f \in \mathrm{BV}([a,b])$, pak f má derivaci s.v.
Konec 6. přednášky 22.3.

14.3. Absolutně spojité funkce

Definice. Nechť $[a,b] \subset \mathbf{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Řekneme, že f je *absolutně spojitá* na $[a,b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, takové, že pro každý systém po dvou disjunktních intervalů $\{(a_j,b_j)\}_{j=1}^n$, $(a_j,b_j) \subset [a,b]$, $j = 1,\dots,n$, splňující

$$\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta, \text{ platí } \sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Množinu všech absolutně spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathrm{AC}([a,b])$.

Poznámky: (a) $\mathrm{AC}([a,b])$ je lineární prostor.
(b) Platí $f \in \mathrm{Lip}([a,b]) \Rightarrow f \in \mathrm{AC}([a,b]) \Rightarrow f \in \mathrm{BV}([a,b]) \cap C([a,b])$, žádnou z implikací nelze obrátit.
(c) Nechť $f \in \mathrm{AC}([a,b])$, pak existují $v, u\,\mathrm{AC}([a,b])$ rostoucí tak, že $f(x) = v(x) - u(x)$.

Věta T 14.5 (integrál derivace absolutně spojité funkce)**.** *Nechť* $f \in \mathrm{AC}([a,b])$. *Potom* $f' \in L^1([a,b])$ *a*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx. \tag{14.1}$$

Poznámky: Z TMI víme: Nechť $\theta \in L^1([a,b])$, pak

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall M \subset [a,b]:\ |M| < \delta \Rightarrow \Big| \int_M |\theta(t)\Big|\,dt| < \varepsilon.$$

Věta L 14.6 (neurčitý Lebesgueův integrál)**.** *Nechť* $\theta \in L^1([a,b])$ *a* f *je neurčitý Lebesgueův integrál* θ, *tj. existuje konstanta* C *tak, že*

$$f(x) = \int_a^x \theta(t)\,dt + C, \qquad x \in [a,b]. \tag{14.2}$$

Potom f *je absolutně spojitá a* $f' = \theta$ *s.v.*

Důsledek: Funkce $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ je absolutně spojitá, právě když je neurčitým Lebesgueovým integrálem Lebesgueův nějaké funkce $\theta \in L^1([a,b])$.

Věta L 14.7 (integrace per partes pro absolutně spojité funkce)**.** *Nechť* $f, g \in \mathrm{AC}([a,b])$. *Potom*

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

15. Fourierovy řady

15.1. Základní pojmy

Značení: Symbolem $\mathcal{P}_{2\pi}$ značíme množinu všech lokálně integrovatelných 2π-periodických funkcí na $\mathbf{R}$.

Definice. Nechť a_k, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a b_k, $k \in \mathbf{N}$, jsou posloupnosti reálných čísel. Pak řadu funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *trigonometrickou řadou.* Je-li navíc $n \in \mathbf{N}$, pak funkci

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *trigonometrickým polynomem stupně* n.

Poznámka: Trigonometrické funkce jsou ortogonální v následujícím smyslu (viz Věta 12.11): pro každé dvě různé funkce $f, g \in \mathcal{T}$ platí

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx = 0.$$

Dále platí

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot 1\,dx = 2\pi, \qquad \int_0^{2\pi} (\cos(kx))^2\,dx = \int_0^{2\pi} (\sin(kx))^2\,dx = \pi, \qquad k \in \mathbf{N}.$$

Věta L 15.1 (Fourierovy vzorce). *Nechť* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *a* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *jsou posloupnosti reálných čísel a řada*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

konverguje stejnoměrně k funkci f *na* $\mathbf{R}$*. Potom*

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, dx, \quad k \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Definice. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Pak posloupnosti reálných čísel $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, definované předpisy

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, dx, \quad k \in \mathbf{N}, \end{aligned}$$

nazýváme *Fourierovými koeficienty* funkce f. Trigonometrickou řadu

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))\,, \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *Fourierovou řadou* funkce f. Vztah mezi funkcí f a její Fourierovou řadou Sf značíme symbolem $f \sim Sf$. Pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ dále definujeme *částečný součet Fourierovy řady* funkce f předpisem

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))\,, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Důsledek Vět 12.10 a 12.12: Nechť $f \in L^2(0, 2\pi)$ a a_k, b_k jsou Fourierovy koeficienty f. Pak platí

$$f(x) = S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ve smyslu rovnosti rovnosti L^2 funkcí. Tedy v příslušném metrickém prostoru platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \lim_{n\to\infty} S_n f(x).$$

Navíc platí Parsevalova rovnost

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Motivace: Nechť $f \in P_{2\pi}$. Platí $f(x) = S_f(x)$ pro všechna x, nebo alespoň pro s.v. x? Neplatí dokonce $S_n f(x) \rightrightarrows f(x)$?

Poznámky: (a) Konvence $\frac{a_0}{2}$ je zavedena proto, abychom měli stejný vzorec pro a_k v případě $k = 0$ i v případech $k \in \mathbf{N}$.

(b) V definici $\{a_k\}$ a $\{b_k\}$ lze integrovat přes libovolný interval délky 2π, tedy

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x) \sin(kx)\, dx, \quad k \in \mathbf{N}, \end{aligned}$$

pro jakékoli $\alpha \in \mathbf{R}$. Nejčastěji se používá $\alpha = 0$ nebo $\alpha = -\pi$.

(c) Symbol $f \sim Sf$ označuje pouze fakt, že řada stojící vpravo je Fourierovou řadou funkce stojící vlevo. Nevypovídá nic o případné konvergenci řady Sf (stejnoměrné ani bodové). Nelze jej zaměovat za symbol $f = Sf$, který by znamenal, že řada vpravo bodově konverguje a jejím bodovým součtem je funkce f.

(d) Fourierovy řady lze definovat pro funkce s libovolnou periodou $\ell > 0$. řada má pak tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(\frac{k2\pi x}{\ell}) + b_k \sin(\frac{k2\pi x}{\ell}) \right), \quad x \in \mathbf{R},$$

a vzorce pro koeficienty mají odpovídající tvar.

Poznámka: Je-li $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ sudá, potom $b_k = 0$, $k \in \mathbf{N}$, a
$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(kx)\, dx, \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$
Je-li f lichá, potom $a_k = 0$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, a
$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(kx)\, dx, \quad k \in \mathbf{N}.$$
Trigonometrickou řadu
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx), \quad x \in \mathbf{R},$$
nazýváme *cosinovou řadou* a trigonometrickou řadu
$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \quad x \in \mathbf{R},$$
nazýváme *sinovou řadou.*

Příklad: Nechť $f(x) = x^2$ pro $x \in [-\pi, \pi)$ a nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Potom
$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(kx)}{k^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$
Kdybychom věděli, že řada Sf konverguje k funkci f (alespoň bodově), získali bychom po dosazení postupně $x = 0$ a $x = \pi$ vzorce
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Konec 8. přednášky 5.4.

15.2. Bodová konvergence Fourierových řad

Definice. Nechť $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Potom funkci
$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx), \quad x \in \mathbf{R},$$
nazýváme *Dirichletovým jádrem.*

Poznámky:[vlastnosti D_n] Nechť $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Potom

(a) D_n je sudá spojitá 2π-periodická funkce splňující $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$,

(b) platí
$$D_n(x) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin(\frac{x}{2})}, \quad x \in \mathbf{R},\ x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z},$$

(c) platí
$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\, dx = \pi.$$

Věta L 15.2 (o částečných součtech Fourierovy řady)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Potom pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí*
$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + y) D_n(y)\, dy = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x + y) + f(x - y)) D_n(y)\, dy.$$

Definice. *Jednoduchou funkcí* nazýváme každou funkci tvaru
$$s(x) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \chi_{E_j}(x), \qquad x \in \mathbf{R},$$
kde $J \in \mathbf{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_J \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ a $E_1, \dots, E_J$ jsou měřitelné podmnožiny $\mathbf{R}$ splňující $\lambda(E_j) < \infty$ pro každé $j \in \{1, \dots, J\}$.

Poznámka: Množina všech jednoduchých funkcí je hustá v prostoru L^1.

Věta T 15.3 (Riemannovo–Lebesgueovo lemma)**.** *Nechť $(a, b) \subset \mathbf{R}$ je omezený interval a nechť $f \in L^1(a, b)$. Potom*
$$\lim_{t \to \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx)\, dx = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{t \to \infty} \int_a^b f(x) \sin(tx)\, dx = 0.$$

Důsledek: Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ Fourierovými koeficienty nějaké funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Věta L 15.4 (Riemannova věta o lokalizaci)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbf{R}$ a $s \in \mathbf{R}$. Potom $Sf(x) = s$ právě tehdy, když existuje $\delta \in (0, \pi)$ takové, že*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} (f(x+t) + f(x-t) - 2s) D_n(t)\, dt = 0.$$

Poznámka: Z Riemannovy věty o lokalizaci plyne, že konvergence Fourierovy řady funkce f v bodě x závisí pouze na hodnotách funkce f na libovolně malém prstencovém okolí bodu x.

Konec 9. přednášky 12.4.

Příklad: Dokažte, že

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2},$$

je-li integrál Newtonův.

Značení: Nechť $x \in \mathbf{R}$ a f je reálná funkce definovaná na nějakém okolí bodu x. Značíme $f(x+) = \lim_{t\to x_+} f(t)$ a $f(x-) = \lim_{t\to x_-} f(t)$, pokud tyto limity existují.

Věta L 15.5 (Diniovo kritérium)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a nechť $x \in \mathbf{R}$. Nechť existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$ a nechť dále existují vlastní limity*

$$\lim_{t\to 0_+} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} \qquad \text{a} \qquad \lim_{t\to 0_+} \frac{f(x-t) - f(x-)}{t}.$$

Potom řada Sf konverguje v bodě x a platí

$$Sf(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Speciálně, má-li funkce f konečné jednostranné derivace v bodě x, potom $Sf(x) = f(x)$.

Věta T 15.6 (Jordanovo–Dirichletovo kritérium - asi BD)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a nechť $f \in \mathrm{BV}([0, 2\pi])$. Potom*

(a) *pro každé $x \in [0, 2\pi]$ konverguje Fourierova řada $Sf(x)$ a platí*

$$Sf(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2};$$

(b) *je-li funkce f navíc spojitá na $(a, b) \subset [0, 2\pi]$, potom*

$$S_n f \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \quad \text{na } (a, b).$$

Poznámka: Je-li funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ po částech monotónní na (a, b) nebo po částech třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b), pak pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$Sf(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

15.3. Stejnoměrná konvergence - Fejérova věta

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že a_n konverguje k $a \in \mathbf{R}$ v Cesarově smyslu, pokud pro posloupnost

$$\sigma_n = \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1} \text{ konverguje k } a.$$

Poznámka: Zřejmě

$$a_n \to a \Longrightarrow a_n \to a \text{ v Cesarově smyslu,}$$

ale opačná implikace neplatí. Například $(-1)^n$ konverguje Cesarovsky k nule, ale nekonverguje.

Definice. Nechť $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Potom funkci

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *Fejérovým jádrem.*

Poznámky: Nechť $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Potom

(a) K_n je sudá spojitá 2π-periodická funkce, splňující $K_n(0) = \frac{n+1}{2}$,

(b) platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\, dx = \pi,$$

(c) platí

$$K_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2, \quad x \in \mathbf{R},\ x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Definice. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbf{R}$ a nechť $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Pak výraz

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k f(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme n-tým *částečným Fejérovým součtem* funkce f.

Poznámka: Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbf{R}$ a nechť $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Potom

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) K_n(t)\, dt.$$

Věta T 15.7 (Fejérova). *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$.*

(a) *Jestliže pro nějaké $x \in \mathbf{R}$ existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$, potom*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

(b) *Je-li funkce f spojitá na nějakém intervalu $(a, b) \subset \mathbf{R}$, potom*

$$\sigma_n f \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \quad \text{na } (a, b).$$

Konec 10. přednášky 19.4.

Věta L 15.8 (Weierstrassova - trigonometrická verze). *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ je spojitá na $\mathbf{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje trigonometrický polynom T splňující*

$$\|f - T\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Důsledek (Weierstrass): Nechť $f \in C([a, b])$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje polynom $P \in \mathcal{P}$ splňující

$$\|f - P\|_{\mathcal{C}([a,b])} < \varepsilon.$$

Věta T 15.9 (Fourierovy koeficienty určují funkci). *Nechť $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$ mají stejné Fourierovy koeficienty. Potom $f = g$ skoro všude.*

Důsledek: Z předchozí věty snadno plyne Věta T 12.12. o maximalitě trigonometrických funkcí. Tedy trigonometrické funkce skutečně tvoří bázi prostoru $L^2(0, 2\pi)$ jak jsme potřebovali u Hilbertových prostorů.

Poznámka: Obecně připouštíme komplexní funkce reálné proměnné. Protože pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí vzorce

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{a} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

je možné přepsat trigonometrický polynom

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ve tvaru

$$c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}).$$

K dané komplexní funkci $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ pak dostaneme komplexní Fourierovu řadu

$$Sf(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}),$$

kde

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx,\ k \in \mathbf{Z}.$$

15.4. Fourierova transformace

Motivace: Je těžší vyřešit diferenciální rovnici

$$y'' - y = e^{-x^2},$$

nebo nalézt funkci z splňující

$$-x^2 z(x) - z(x) = e^{-x^2}?$$

Definice. Nechť $f \in L^1(\mathbf{R})$. Pak *Fourierova transformace* f je definována jako

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$$

a *inverzní Fourierova transformace* f je definována jako

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x}\, dx.$$

Příklad: Spočtěte Fourierovu transformaci funkce $\chi_{[-a,a]}(x)$.

Poznámka: a) Pro $f \in L^2(\mathbf{R})$ platí $\check{\hat{f}} = f$ ve smyslu rovnosti L^2 funkcí.
b) Platí, že existuje-li vlastní $f'(x)$, pak $\check{\hat{f}}(x) = f(x)$.
c) Je-li $f \in BV$, pak $\check{\hat{f}}(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$, je-li $\check{f}(\omega) = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-K}^{K} f(x) e^{i\omega x}\, dx$.

Příklad: Spočtěte inverzní Fourierovu transformaci k funkci z prvního příkladu.

Připomeň: Nechť $f,\ g \in L^1(\mathbf{R})$. Pak konvoluce funkcí f a g je definována jako

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

Věta L 15.10 (Fourierova transformace konvoluce)**.** *Nechť $f,\ g \in L^1(\mathbf{R})$. Pak*

$$\widehat{(f * g)}(\omega) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega)\ \hat{g}(\omega).$$

Poznámka: Analogicky předchozí větě lze ukázat, že

$$\sqrt{2\pi}(\check{fg})(x) = \check{f} * \check{g}(x)$$

Věta L 15.11 (Fourierova transformace derivace)**.** *Nechť $f \in L^1(\mathbf{R})$, f a f' jsou spojité na $\mathbf{R}$, $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ a $f' \in L^1(\mathbf{R})$. Pak*

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega).$$

Příklad: Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - y = e^{-x^2}.$$

Příklad: Ukažte, že

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \widehat{e^{-|x|}} = \frac{1}{1+\omega^2}.$$

Konec 12. přednášky 3.5.

16. Souvislé a obloukově souvislé množiny

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset P$ je *obojetná*, jestliže je zároveň otevřená i uzavřená.

Příklady: (a) V každém metrickém prostoru (P, ϱ) jsou množiny $\emptyset$ a P obojetné.
(b) V metrickém prostoru $[0,1] \cup (2,3)$ jsou množiny $[0,1]$ i $(2,3)$ obojetné.
(c) Každá podmnožina diskrétního prostoru je obojetná.

Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je *souvislý*, jestliže není sjednocením dvou disjunktních neprázdných otevřených množin. Řekneme, že množina $A \subset P$ je *souvislá*, jestliže je metrický prostor (A, ϱ) souvislý.

Příklady: (a) V každém metrickém prostoru jsou prázdná množina a každá jednobodová množina souvislé.
(b) $([0,1] \cup (2,3), |.|)$ není souvislý.
(c) $(\mathbf{R}, |.|)$ je souvislý.
(d) libovolný interval v $\mathbf{R}$ je souvislý.

Věta L 16.1 (charakterizace souvislých prostorů)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak jsou následující čtyři výroky ekvivalentní:*
(i) *P není souvislý;*
(ii) *existují dvě uzavřené neprázdné disjunktní množiny F_1, F_2 takové, že $P = F_1 \cup F_2$;*
(iii) *existuje obojetná množina $H \subset P$, která je navíc neprázdná a různá od P;*

Poznámka: Nechť $G \subset P$ je otevřená. Pak $A \cap G$ je otevřená v metrickém prostoru (A, ϱ).

Věta T 16.2 (vlastnosti souvislých prostorů)**.** *Nechť* (P,ϱ) *je metrický prostor.*

a) Nechť (Q,σ) *je metrický prostor a* $f\colon P\to Q$ *je spojité. Nechť* $A\subset P$ *je souvislá množina, pak* $f(A)$ *je souvislá v* Q*.*

b) Nechť $A\subset P$ *je souvislá a* $A\subset B\subset\overline{A}$*. Pak* B *je souvislá. Speciálně* $\bar{A}$ *je souvislá.*

c) Nechť I *je neprázdná množina a* $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *jsou souvislé podmnožiny* P*. Nechť každé dvě množiny* A_α*,* A_β*,* $\alpha,\beta\in I$*, se protínají. Potom* $A:=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ *je souvislá.*

Důsledek: Nechť f je spojité zobrazení intervalu I do metrického prostoru. Potom $f(I)$ je souvislá množina.

Příklad: Nechť

$$A=\big\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\colon y=\sqrt{1-x^2}\,\big\},$$
$$B=\big\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\colon y=-\sqrt{1-x^2}\,\big\}.$$

Potom A, B jsou souvislé (spojitý obraz intervalu), ale $A\cap B$ není souvislá.

Definice. Řekneme, že množina A je *komponenta* P, jestliže A je maximální souvislá podmnožina P.

Věta L 16.3 (charakterizace komponent)**.** *Nechť* (P,ϱ) *je neprázdný metrický prostor. Potom*

(a) *komponenty* P *jsou neprázdné a uzavřené,*
(b) *každý bod* P *je obsažen v některé komponentě,*
(c) *komponenty jsou navzájem disjunktní.*

Konec 13. přednášky 10.5.

Definice. Řekneme, že metrický prostor (P,ϱ) je *křivkově souvislý*, jestliže pro každé $x,y\in P$ existuje spojité zobrazení $\gamma\colon[0,1]\to(P,\varrho)$ takové, že $\gamma(0)=x$ a $\gamma(1)=y$. Řekneme, že množina $A\subset P$ je *křivkově souvislá*, jestliže je metrický prostor (A,ϱ) křivkově souvislý.

Věta L 16.4 (souvislost souvislosti s křivkovou souvislostí)**.** *Každý křivkově souvislá množina v metrickém prostoru je souvislá.*

Příklady: (a) Graf spojité funkce na intervalu je křivkově souvislý.

(b) $(\mathbf{R}^n,|.|)$ je křivkově souvislý.
(c) $(C([0,1]),\sup)$ je křivkově souvislý.
(d) Podmnožina prostoru $\mathbf{R}^2$ definovaná jako graf funkce

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{pro } x\in(-\infty,0]\\ \sin\frac{1}{x} & \text{pro } x\in(0,\infty),\end{cases}$$

je příkladem souvislého metrického prostoru, který není křivkově souvislý.

Věta L 16.5 (souvislost a otevřené množiny v $\mathbf{R}^n$)**.** *Nechť* $G\subset\mathbf{R}^n$ *je otevřená. Pak* G *je souvislá právě tehdy, když je křivkově souvislá.*

Poznámka: (a) Spojitý obraz křivkově souvislého metrického prostoru je křivkově souvislý.

(b) Uzávěr křivkově souvislé množiny nemusí být křivkově souvislý.
(c) Sjednocení křivkově souvislých množin s neprázdným průnikem je křivkově souvislá množina.
Konec 14. přednášky 17.5.