9. Metrické prostory I

9.1. Základní pojmy

Definice. *Metrickým prostorem* budeme rozumět dvojici (P,ϱ), kde P je množina bodů a $\varrho : P\times P \to \mathbf{R}$ splňuje

$$(i)\ \forall x,y\in P:\ \varrho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y,$$
$$(ii)\ \forall x,y\in P:\ \varrho(x,y)=\varrho(y,x),\ \text{(symetrie)}$$
$$(iii)\ \forall x,y,z\in P:\ \varrho(x,z)\le\varrho(x,y)+\varrho(y,z).\ (\triangle\text{-nerovnost})$$

Funkci ϱ nazýváme *metrika.*

Příklady:
1) Euklidovská metrika na $\mathbf{R}^n$. Pro $x,y\in\mathbf{R}^n$ definujeme $\varrho_e(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}$.
2) Maximová metrika na $\mathbf{R}^n$. Definujeme $\varrho_\infty(x,y)=\max_{i=1\dots n}|x_i-y_i|$.
3) Součtová metrika na $\mathbf{R}^n$. Definujeme $\varrho_1(x,y)=\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|$.
4) Diskrétní metrika na libovolné množině P je definována jako $\varrho(x,x)=0$ pro všechna $x\in P$ a $\varrho(x,y)=1$ pro všechna $x\neq y$.
5) Supremová metrika na $C([0,1])$ je definována $\varrho(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$.
6) Metrika na $L^2([0,2\pi])=\{f:[0,2\pi]\to\mathbf{R}:\ \int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx<\infty\}$ je definována

$$\varrho(f,g)=\sqrt{\int_0^{2\pi}|f(x)-g(x)|^2\,dx}.$$

7) Definujme prostor obrázků $Obr=\{x\in\mathbf{R}^{1280\times1024}:\ x_i\in[0,1]\}$ s metrikou $|x-y|=\varrho_e(x,y)$.

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, $x\in P$, $r>0$. *Otevřenou koulí se středem x a poloměrem r* nazveme

$$B(x,r):=\{y\in P:\ \varrho(x,y)<r\}.$$

Uzavřenou koulí se středem x a poloměrem r nazveme

$$\overline{B(x,r)}:=\{y\in P:\ \varrho(x,y)\le r\}.$$

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $G\subset P$ je *otevřená (v (P,ϱ))*, jestliže pro každý bod $x\in G$ existuje $r>0$, že $B(x,r)\subset G$. Řekneme, že množina $F\subset P$ je *uzavřená (v (P,ϱ))*, pokud je $P\setminus F$ otevřená.

Příklady: 1. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Pak $B(x,r)$ je otevřená množina a $\overline{B(x,r)}$ je uzavřená množina.
2. Je $[0,1]$ otevřená množina v $\mathbf{R}$ s diskrétní metrikou?

Věta L 9.1 (vlastnosti otevřených množin)**.** *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Pak*

(i) $\emptyset$ a P jsou otevřené.

(ii) Jsou-li $G_1,\dots,G_n$ otevřené, pak $\bigcap_{i=1}^n G_i$ je otevřená.

(iii) Nechť A je libovolná (i nekonečná) indexová množina. Jsou-li $G_\alpha,\ \alpha\in A$ otevřené, pak $\bigcup_{\alpha\in A}G_\alpha$ je otevřená.

Věta L 9.2 (vlastnosti uzavřených množin)**.** *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Pak*

(i) $\emptyset$ a P jsou uzavřené.

(ii) Jsou-li $F_1,\dots,F_n$ uzavřené, pak $\bigcup_{i=1}^n F_i$ je uzavřená.

(iii) Jsou-li $F_\alpha,\ \alpha\in A$ uzavřené, pak $\bigcap_{\alpha\in A}F_\alpha$ je uzavřená.

Příklad: $\bigcap_{i=1}^\infty(-\frac{1}{i},\frac{1}{i})=\{0\}$ není otevřená v $\mathbf{R}$.
$\bigcup_{i=1}^\infty[\frac{1}{i},1-\frac{1}{i}]=(0,1)$ není uzavřená v $\mathbf{R}$.

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, $A\subset P$ a $x\in P$. Řekneme, že x je *vnitřním bodem* množiny A, jestliže existuje $r>0$ tak, že $B(x,r)\subset A$. Množinu všech vnitřních bodů A nazýváme *vnitřkem* A a značíme $\operatorname{int}A$.

Příklad: Co je vnitřek $[0,1)$ v $(\mathbf{R},|.|)$, $Q(0,1)$ v $(\mathbf{R}^2,|.|)$ a $\mathbf{Q}$ v $(\mathbf{R},|.|)$?

Věta L 9.3 (charakterizace vnitřku). *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $A\subset P$. Potom $\operatorname{int} A$ je největší (vzhledem k množinové inkluzi) otevřená množina obsažená v A.*

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, $M\subset P$ a $x\in P$. Řekneme, že x je *hraničním bodem* množiny M, jestliže pro každé $r>0$ platí

$$M\cap B(x,r)\neq\emptyset \text{ a } (P\setminus M)\cap B(x,r)\neq\emptyset.$$

Množinu všech hraničních bodů M nazýváme *hranicí* M a značíme ji ∂M.
Uzávěr množiny M je definován jako $\overline{M}=M\cup\partial M$.

Příklad: Co je hranice a uzávěr $[0,1)$ v $(\mathbf{R},|.|)$, $Q(0,1)$ v $(\mathbf{R}^2,|.|)$ a $\mathbf{Q}$ v $(\mathbf{R},|.|)$?

Věta L 9.4 (uzávěr a uzavřené množiny). *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $A\subset P$. Pak*

$$A \text{ je uzavřená v } P\Leftrightarrow\overline{A}=A.$$

Věta L 9.5 (vlastnosti uzávěru). *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $A\subset P$. Potom platí*

$$(i)\ A\subset B\Rightarrow\overline{A}\subset\overline{B},$$
$$(ii)\ \text{nechť } A\neq\emptyset,\ \text{pak } \overline{A}=\{x\in P:\ \varrho(x,A)=0\},$$
$$(iii)\ \overline{\overline{A}}=\overline{A},\ \text{tedy } \overline{A} \text{ je uzavřená množina.}$$

9.2. Konvergence a spojitá zobrazení v metrických prostorech

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost prvků P a $x\in P$. Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *konverguje k x (v (P,ϱ))*, pokud $\lim_{n\to\infty}\varrho(x_n,x)=0$. Značíme $\lim_{n\to\infty}x_n=x$, nebo $x_n\overset{\varrho}{\to}x$.

Poznámka: Pro $(\mathbf{R},|\cdot|)$ je tento pojem konvergence shodný s dříve zavedeným.

Věta L 9.6 (vlastnosti konvergence). *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Pak platí*

(i) Nechť pro posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ z P existuje $n_0\in\mathbf{N}$ a $x\in P$ tak, že pro všechna $n\geq n_0$ platí $x_n=x$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ a $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=y\Rightarrow x=y$. (Jednoznačnost limity)

(iii) Nechť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ je vybraná posloupnost z $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ a nechť $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. Pak $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x$.

Definice. Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory. Nechť $M\subset P$, $f:M\to Q$ a $x_0\in M$. Řekneme, že f je *spojitá v bodě x_0 (vzhledem k M)*, jestliže

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in B_\varrho(x_0,\delta)\cap M:\ f(x)\in B_\sigma(f(x_0),\varepsilon).$$

Řekneme, že f je *spojitá na M (vzhledem k M)*, jestliže je spojitá v každém bodě M (vzhledem k M). Nechť pro každé $\delta>0$ platí $B_\varrho(x_0,\delta)\cap M\setminus\{x_0\}\neq\emptyset$. Řekneme, že f má v bodě x_0 *limitu (vzhledem k M) rovnou $y\in Q$*, jestliže

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in B_\varrho(x_0,\delta)\cap M\setminus\{x_0\}:\ f(x)\in B_\sigma(y,\varepsilon).$$

Poznámky: 1. Pojem konvergence a spojitosti v $(\mathbf{R}^n,|.|)$ je shodný s dříve zavedeným pojmem.
2. Definice spojitosti lze zapsat jako $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ f(B_\varrho(x_0,\delta))\subset B_\sigma(f(x_0),\varepsilon)$.

Příklady (viz 2. semestr): 1. Nechť $h(x),g(y)$ jsou spojité z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}$. Pak $f(x,y)=h(x)$ a $\tilde{f}(x,y)=g(y)$ jsou spojité z $\mathbf{R}^2$ do $\mathbf{R}$.
2. Nechť $f_1(x),f_2(x)$ jsou spojité z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$. Pak $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$ a $\tilde{f}(x)=f_1(x)+f_2(x)$ jsou spojité z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$. Specielně například polynomy funkcí více proměnných jsou spojité funkce.

Věta L 9.7 (charakterizace spojitosti). *Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory a $f:P\to Q$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) f je spojitá na P,

(ii) $\forall G\subset Q$ otevřenou, je $f^{-1}(G)$ otevřená,

(iii) $\forall F\subset Q$ uzavřenou, je $f^{-1}(F)$ uzavřená.

Příklady: 1. Množina $\{[x,y]\in\mathbf{R}^2:\ x^2+y^2<1\}$ je otevřená.
2. Množina $\{[x,y,z]\in\mathbf{R}^3:\ x+y+z\geq 0,\ x^2+y^2+z^2\leq 1\}$ je uzavřená.

Věta L 9.8 (spojitost složeného zobrazení). *Nechť (P,ϱ), (Q,σ) a (Z,τ) jsou metrické prostory. Nechť $f:P\to Q$ je spojité zobrazení a $g:Q\to Z$ je spojité zobrazení. Pak $g\circ f:P\to Z$ je spojité zobrazení.*

Příklad: Funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ je spojitá z $\mathbf{R}^2$ do $\mathbf{R}$.

Začátek 2. ročníku

Věta L 9.9 (Heine)**.** *Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory. Nechť $M \subset P$, $x_0 \in M$ a $f : M \to Q$. Pak je ekvivalentní:*

$$(i) \quad \lim_{x\to x_0,\ x\in M} f(x) = f(x_0), \ \textit{neboli } f \textit{ je spojitá v } x_0,$$

$$(ii) \ \textit{pro každou posloupnost } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \textit{ splňující}$$
$$x_n \in M \textit{ a } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \textit{ platí } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Důsledek: Jako speciální případ dostáváme Heineho Větu 3.1 ze ZS.

9.3. Kompaktní množiny

Věta L 9.10 (charakterizace uzavřených množin)**.** *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $F \subset P$. Pak*

$$F \textit{ je uzavřená } \Leftrightarrow \big(\forall x_n \overset{\varrho}{\to} x \textit{ a } x_n \in F \Rightarrow x \in F\big).$$

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $K \subset P$. Řekneme, že K je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti prvků K lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v K.

Příklady: 1. $[0,1]$ je kompaktní v $\mathbf{R}$.
2. $[0,1)$ není kompaktní v $\mathbf{R}$.
3. Konečná množina v (P,ϱ) je kompaktní.

Věta L 9.11 (vlastnosti kompaktních množin)**.** *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $K \subset P$ je kompaktní. Pak platí*

(i) K je uzavřená,

(ii) Je-li $F \subset K$ uzavřená, pak je F kompaktní,

(iii) K je omezená (tedy $\exists x \in P,\ r > 0,$ že $K \subset B(x,r)$).

Věta T 9.12 (charakterizace kompaktních množin $\mathbf{R}^n$)**.** *Množina $K \subset \mathbf{R}^n$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

Konec 1. přednášky 30.9.

Příklady: 1. $\overline{B(0,1)}$ je kompaktní v $\mathbf{R}^n$.
2. $\overline{B(0,1)}$ není kompaktní v $C([0,1])$.

Věta L 9.13 (nabývání extrémů na kompaktu)**.** *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $K \subset P$ je kompaktní. Nechť $f : K \to \mathbf{R}$ je spojitá. Pak f nabývá na K svého maxima i minima. Specielně je tedy f na K omezená.*

Věta L 9.14 (spojitý obraz kompaktu)**.** *Nechť (P,ϱ), (Q,τ) jsou metrické prostory a nechť $f : P \to Q$ je spojité zobrazení. Nechť $K \subset P$ je kompaktní množina, pak $f(K) \subset Q$ je kompaktní množina.*

Definice. Nechť (P,ϱ), (Q,τ) jsou metrické prostory, $K \subset P$ a $f : K \to Q$. Řekneme, že f je stejnoměrně spojitá na K, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,y \in K : \ \Big[\varrho(x,y) < \delta \Rightarrow \tau(f(x),f(y)) < \varepsilon\Big].$$

Věta T 9.15 (o vztahu spojitosti a stejnoměrné spojitosti na metrickém prostoru)**.** *Nechť (P,ϱ), (Q,τ) jsou metrické prostory, $K \subset P$ je kompaktní a nechť $f : K \to Q$ je spojité zobrazení. Pak f je stejnoměrně spojitá na K.*

9.4. Úplné metrické prostory

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost bodů z P. Řekneme, že x_n *splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku* (případně, že je cauchyovská), jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall m,n \in \mathbf{N},\ m,n \geq n_0 : \ \varrho(x_n,x_m) < \varepsilon.$$

Poznámka: Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.

Definice. Řekneme, že metrický prostor (P,ϱ) je úplný, jestliže každá cauchyovská posloupnost bodů z P je konvergentní.

Příklady: 1. $(\mathbf{R}, |.|)$ je úplný (viz Věta 2.14).
2. $((0,1), |.|)$ není úplný.
3. $(\mathbf{Q}, |.|)$ není úplný.
4. $(\mathbf{R}^n, |.|)$ je úplný.

Věta L 9.16 (vztah kompaktnosti a úplnosti)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a P je kompaktní. Pak P je úplný metrický prostor.*

Konec 2. přednášky 4.10.

Věta T 9.17 (úplnost a prostor spojitých funkcí)**.** *Metrický prostor $C([0,1])$ se supremovou metrikou je úplný.*

Poznámka: Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak lze zavést metrický prostor spojitých funkcí na P jako

$$C(P) := \{f : P \to \mathbf{R} :\ f \text{ je spojitá}\} \text{ s metrikou } \tau(f,g) = \sup_{x \in P} |f(x) - g(x)|.$$

Tento metrický prostor je také úplný a důkaz je jednoduchá analogie důkazu minulé věty (v důkazu jsme nikde nevyužili vlastnosti $[0,1]$). Například $C([0,1]^2)$ je tedy úplný.

Příklad: Metrický prostor $C([0,1])$ s metrikou $\varrho(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$ není úplný.

Věta T 9.18 (Banachova věta o kontrakci)**.** *Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor a $T : P \to P$ je kontrakce, tedy*

$$\exists \gamma \in [0,1)\ \forall x, y \in P :\ \varrho(T(x), T(y)) \leq \gamma \varrho(x,y).$$

Pak existuje právě jedno $x \in P$ tak, že $T(x) = x$.

Aplikace: 1. Předchozí věta nám ukáže, že každá "hezká" diferenciální rovnice má řešení.
2. Fractal compression

Věta L 9.19 (o převedení na integrální tvar)**.** *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval, $x_0 \in I$, $f : I \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spojitá a $y : I \to \mathbf{R}$ je spojitá. Pak y je řešení ODR*

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ na } I \text{ splňující počáteční podmínku } y(x_0) = y_0$$

právě tehdy, když

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds \text{ pro všechna } x \in I.$$

Konec 3. přednášky 7.10.

Definice. Nechť $I \subset \mathbf{R}^2$ je oteřený interval. Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbf{R}$ je *lokálně lipschitzovská* vůči y, pokud pro všechny omezené množiny $U \subset I$, existuje $K \in \mathbf{R}$ tak, že

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq K|y - \tilde{y}| \text{ pro všechna } [x,y] \in U \text{ a } [x,\tilde{y}] \in U.$$

Věta T 9.20 (Picard)**.** *Nechť $I \subset \mathbf{R}^2$ je otevřený interval a $[x_0, y_0] \in I$. Nechť $f : I \to \mathbf{R}$ je spojitá a lokálně lipschitzovská vůči y. Pak existuje $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ okolí x_0 a funkce $y(x)$ definovaná na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, že $y(x)$ splňuje ODR*

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ pro } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ s počáteční podmínkou } y(x_0) = y_0.$$

Navíc y je jediné řešení na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

NA PROSEMINARI DEJ UDELAT ARZELA-ASCOLI A PEANO

10. Funkce více proměnných

10.1. Úvodní definice a spojitost

Většina definic zde je jen "opakování" již známého z LS, nebo z definic spojitých funkcí na metrickém prostoru.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$. *Funkcí více reálných proměnných* rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbf{R}$. *Vektorovou funkcí více reálných proměnných* rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbf{R}^m$, kde $m \in \mathbf{N}$.

Definice. *Vzdálenost dvou bodů* $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $y = [y_1, y_2, \ldots, y_n] \in \mathbf{R}^n$ je

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Nechť $c \in \mathbf{R}^n$ a $r > 0$. *Otevřená koule* se středem v c o poloměru r je množina

$$B(c,r) := \{x \in \mathbf{R}^n :\ |x - c| < r\}.$$

Prstencová okolí c je definováno jako $P(c,r) := B(c,r) \setminus \{c\}$.

Příklad: Trojúhelníková nerovnost. Pro libovolné $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ platí
$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

Definice. Nechť $f : G \to \mathbf{R}$, kde $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená. Řekneme, že f má v bodě $a \in G$ *limitu* rovnou $A \in \mathbf{R}^*$, jestliže platí
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a, \delta) : \quad f(x) \in B(A, \varepsilon).$$
Značíme $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

Řekneme, že funkce f je bodě $a \in G$ *spojitá*, jestliže $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Limitu (a spojitost) vektorové funkce $f = [f_1, f_2, \ldots, f_m] : G \to \mathbf{R}^m$ definujeme po složkách. Tedy
$$\lim_{x \to a} f(x) = [\lim_{x \to a} f_1(x), \lim_{x \to a} f_2(x), \ldots, \lim_{x \to a} f_m(x)].$$

Zřejmě platí aritmetika limit, věta o dvou policajtech i věta o spojitosti složené funkce (viz Věta 9.8), a proto je budeme používat na cvičení.

Příklad: 1. Funkce $f(x, y) = x$ je spojitá na $\mathbf{R}^2$.

2. Funkce
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0] \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$
je spojitá na $\mathbf{R}^2$.

Definice. Mějme posloupnost bodů $x_j \in \mathbf{R}^n$ pro $j \in \mathbf{N}$. Řekneme, že *limita posloupnosti* x_j je rovna $a \in \mathbf{R}^n$, pokud
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists j_0 \in \mathbf{N}\ \forall j \geq j_0 : \ |x_j - a| < \varepsilon.$$

Poznámka: Konvergence posloupnosti bodů $x_j = [(x_j)_1, (x_j)_2, \ldots, (x_j)_n] \in \mathbf{R}^n$ pro $j \in \mathbf{N}$ je ekvivalentní konvergenci po složkách, tedy
$$\lim_{j \to \infty} x_j = \big[\lim_{j \to \infty} (x_j)_1, \lim_{j \to \infty} (x_j)_2, \ldots, \lim_{j \to \infty} (x_j)_n\big].$$

Příklad: $\lim_{j \to \infty} [\frac{1}{j}, \frac{3j^2+1}{j^2+j}] = [0, 3]$.

Následující věta lze dokázat analogicky důkazu Věty 9.9.

Věta BD 10.1 (Heine). *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$, $a \in G$, $A \in \mathbf{R}^*$ a $f : G \to \mathbf{R}$. Pak je ekvivalentní:*

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = A$,

(ii) pro každou posloupnost $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ splňující
$$x_j \in G \setminus \{a\} \text{ a } \lim_{j \to \infty} x_j = a \text{ platí } \lim_{j \to \infty} f(x_j) = A.$$

Příklad: Funkce
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0] \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$
není spojitá v bodě $[0, 0]$.

Konec 4. přednášky 11.10.

10.2. Parciální derivace a totální diferenciál

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f : G \to \mathbf{R}$ a $x \in G$. *Parciální derivací funkce f v bodě x podle i-té proměnné* nazveme
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t},$$
pokud limita existuje.

Příklad: Spočtěte parciální derivace funce $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$ na $\mathbf{R}^2$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $f : M \to \mathbf{R}$ a $x_0 \in M$. Řekneme, že f nabýva v bodě x_0 svého *minima (lokálního minima) vzhledem k M*, pokud
$$\text{pro všechna } x \in M \text{ platí } f(x) \geq f(x_0)$$
$$\big(\text{existuje } \delta > 0, \text{ že pro všechna } x \in M \cap B(x_0, \delta) \text{ platí } f(x) \geq f(x_0)\big).$$
Analogicky definujeme *maximum (lokální maximum).*

Věta L 10.2 (nutná podmínka existence extrému)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a \in G$ a $f : G \to \mathbf{R}$. Má-li f v bodě a lokální minimum (maximum) a existuje-li $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, pak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.*

Příklady: 1. Nalezněte maximum a minimum funkce $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ na množině $M := \{[x,y] \in \mathbf{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
2. *Metoda nejmenších čtverců (Lineární regrese)*: Mějme zadány body $[x_i, y_i] \in \mathbf{R}^2$, $i = 1, \dots, n$. Chceme nalézt $a, b \in \mathbf{R}$, abychom měli co nejmenší

$$\sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (ax_i + b)\big)^2.$$

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $f : G \to \mathbf{R}$, $x \in G$ a $0 \neq v \in \mathbf{R}^n$. *Derivací funkce f v bodě $x \in G$ ve směru v* nazveme

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

pokud limita existuje.

Příklady: 1. Z existence $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ neplyne existence $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$. Stačí mít $f(x,y) = 1$ na osách a 0 jinde.
2. Z existence všech $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ neplyne spojitost v x. Položme $f = 1$ na $\{[x,y] :\ x \neq 0, y = x^2\}$ a 0 jinde.

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $f : G \to \mathbf{R}$ a $a \in G$. Řekneme, že lineární zobrazení $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je *totální diferenciál funkce f v bodě a*, jestliže

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Značíme $Df(a)$ a hodnotu v bodě $h \in \mathbf{R}^n$ značíme $Df(a)(h)$.

Poznámka: 1. Lineární zobrazení $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ lze reprezentovat jako $L(h) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots + A_n h_n$.
2. Ekvivalentně lze definovat jako $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{|x-a|} = 0$.
3. Geometricky význam je, že lineární funkce $f(a) + L(x - a)$ je velmi blízko původní funkce $f(x) \sim f(a) + L(x - a)$.

Věta L 10.3 (o tvaru totálního diferenciálu)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $f : G \to \mathbf{R}$. Nechť existuje totální diferenciál f v bodě a, pak existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ a pro všechna $h \in \mathbf{R}^n$ platí*

$$Df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) h_n.$$

Navíc pro $0 \neq v \in \mathbf{R}^n$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = Df(a)(v).$$

Příklady: 1. Funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

nemá totální diferenciál v $[0,0]$.
2. Funkce

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

má totální diferenciál v $[0,0]$.

Konec 5. přednášky 14.10.

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $f : G \to \mathbf{R}$ a $a \in G$. Nechť f má v bodě a totální diferenciál. Pak definujeme *gradient* funkce f v bodě a jako vektor

$$\nabla f(a) = \Big[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\Big].$$

Můžeme tedy psát $Df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$.

Věta L 10.4 (geometrický význam gradientu)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $f : G \to \mathbf{R}$. Nechť existuje totální diferenciál f v bodě a, pak*

$$\max\{\frac{\partial f}{\partial v}(a) :\ \|v\| = 1\} = \|\nabla f(a)\|.$$

Poznámka: 1) Nechť existuje totální diferenciál f v a. Pak $|Df(a)(h)| = |\langle \nabla f(a), h \rangle| \leq |\nabla f(a)| \cdot |h|$.
2) metoda největšího spádu.

Věta L 10.5 (o vztahu spojitosti a totálního diferenciálu)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $f : G \to \mathbf{R}$. Nechť existuje totální diferenciál f v bodě a, pak je f v bodě a spojitá.*

Věta T 10.6 (postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $f : G \to \mathbf{R}$. Nechť f má v bodě $a \in \mathbf{R}^n$ spojité parciální derivace, tedy funkce*

$$x \to \frac{\partial f}{\partial x_j}(x),\ j = 1, \dots, n$$

jsou spojité v a. Pak $Df(a)$ existuje.

Věta L 10.7 (o aritmetice totálního diferenciálu - důkaz jen (iii))**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}^n$, $f, g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ a $Df(a)$, $Dg(a)$ existují. Pak existují i $D(f+g)(a)$, $D(cf)(a)$ ($c \in \mathbf{R}$), $D(fg)(a)$, a pokud $g(a) \neq 0$ pak i $D(f/g)(a)$ a platí*

$$\begin{aligned} &(i)\ D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a),\\ &(ii)\ D(cf)(a) = cD(f)(a),\\ &(iii)\ D(fg)(a) = f(a)Dg(a) + Df(a)g(a),\\ &(iv)\ D(f/g)(a) = \frac{Df(a)g(a) - f(a)Dg(a)}{g(a)^2}. \end{aligned}$$

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $f : G \to \mathbf{R}^k$ a $a \in G$. Řekneme, že lineární zobrazení $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ je *derivací funkce f v bodě a*, jestliže

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - L(h)|}{|h|} = 0.$$

Značíme $Df(a)$ a hodnotu v bodě $h \in \mathbf{R}^n$ značíme $Df(a)(h)$.

Poznámka: Nechť $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ je lineární zobrazení. Potom existuje právě jedna $n \times k$ matice A tak, že $L(h) = Ah$.

Konec 6. přednášky 18.10.

Věta L 10.8 (reprezentace derivace maticí)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $f = [f_1, f_2, \dots, f_k] : G \to \mathbf{R}^k$ má derivaci v bodě $a \in G$. Pak $Df(a)$ je reprezentováno maticí*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Poznámky: 1. Má-li f derivaci v a, pak f je v okolí a velmi blízko lineární funkci $f(a)+Df(a)(x-a)$.
2. Matice $Df(a)$ se nazývá Jakobiho matice. Pokud $k = n$ tak se determinant této matice nazývá Jakobián a značí se $J_f(a)$.
3. Derivace $Df(a)$ existuje právě tehdy, když existují totální diferenciály $Df_1(a), \dots, Df_k(a)$.
4. Z 3. bodu a Věty 10.6 dostáváme, že jsou-li všechny parciální derivace f spojité v bodě a, pak existuje derivace $Df(a)$.

Poznámka: Nechť $L = Ah : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ je lineární zobrazení reprezentované maticí A. Pak existuje $C > 0$ tak, že

$$|Ah| \leq C|h|.$$

Lemma Nechť $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ má derivaci v bodě $a \in \mathbf{R}^n$. Pak existuje $\delta_0 > 0$ a $C \in \mathbf{R}$ tak, že

$$|f(a+h) - f(a)| \leq C|h| \text{ pro všechna } h \in B(0, \delta_0).$$

Věta T 10.9 (derivace složeného zobrazení)**.** *Nechť $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$, $g : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^s$, f má derivaci v $a \in \mathbf{R}^n$ a g má derivaci v $b = f(a) \in \mathbf{R}^k$. Pak existuje derivace $Dg \circ f(a)$ a platí*

$$Dg \circ f(a) = Dg(b) \cdot Df(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a).$$

Příklad: Nechť $F = (F_1, F_2) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ je zobrazení definováné

$$F(x,y) = \begin{cases} [(x^2+y^2)(e^x - 1), \frac{x^2}{x^2+y^2}] & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ [0,0] & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \end{cases}$$

a $G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ je zobrazení definované $G(s,t) = [st, s^2, t^2]$. Spočtěte $D(G \circ F)(1,0)$.

Věta L 10.10 (řetízkové pravidlo)**.** *Nechť* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ *má derivaci v* $a \in \mathbf{R}^n$ *a* $g : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ *má totální diferenciál v bodě* $b = f(a) = [f_1(a), \dots, f_k(a)]$*. Pak funkce*

$$h(x) = g(f_1(x), \dots, f_k(x))$$

má totální diferenciál v a *a platí*

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial y_j}(b) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).$$

Konec 7. přednášky 21.10.

Věta L 10.11 (o přírůstku funkce)**.** *Nechť* $G \subset \mathbf{R}^n$ *je otevřená a* $f : G \to \mathbf{R}$ *má totální diferenciál v každém bodě* G*. Nechť* $a, b \in G$ *a nechť úsečka* L *spojující* a, b *je obsažena v* G*, tj.* $L = \{(1-t)a + tb : t \in [0,1]\} \subset G$*. Pak existuje* $\xi \in L$ *takové, že*

$$f(b) - f(a) = Df(\xi)(b - a).$$

10.3. Parciální derivace vyšších řádů

Definice. Nechť f má na otevřené množině $G \subset \mathbf{R}^n$ parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak definujeme pro $a \in G$ a $j \in \{1, \dots, n\}$ *druhou parciální derivaci*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(a) \text{ pro } i \neq j \text{ a } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(a).$$

Analogicky definujeme parciální derivace vyšších řádů.

Příklad: Spočtěte všechny derivace až do řadu 3 od $f(x,y) = x^2 e^{x+y}$.

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $f : G \to \mathbf{R}$. Řekneme, že $f \in C^1(G)$, pokud existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, na G a jsou to spojité funkce na G. Řekneme, že $f \in C^k(G)$, $k \in \mathbf{N}$, pokud existují všechny parciální derivace f až do řadu k včetně a jsou to spojité funkce na G.

Důsledek: Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená. Z Věty 10.6 dostáváme, že je-li $f \in C^1(G)$, pak existuje totální diferenciál f ve všech bodech G.

Věta T 10.12 (záměnnost parciálních derivací)**.** *Nechť* $G \subset \mathbf{R}^n$ *je otevřená,* $a \in G$ *a* $f \in C^2(G)$*. Pak*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Příklad: Nechť

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

Pak

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $a \in G$. Nechť $f \in C^2(G)$. Definujeme *Hessovu matici* f jako

$$D^2 f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Podle předchozí věty je tato matice symetrická, a proto můžeme pracovat s následující kvadratickou formou

$$D^2 f(a)(u,v) = u^T D^2 f(a) v \text{ pro každé } u, v \in \mathbf{R}^n.$$

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $a \in G$. Nechť $f \in C^2(G)$. Pak definujeme *Taylorův polynom* f *druhého řádu* jako

$$T_2^{f,a}(x) := f(a) + Df(a)(x-a) + \frac{1}{2} D^2 f(a)(x-a, x-a).$$

Konec 8. přednášky 25.10.

Věta L 10.13 (Taylorova věta pro druhý řád - bez důkazu)**.** *Nechť* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *je třídy* C^2 *na nějakém okolí bodu* $a \in \mathbf{R}^n$*. Pak*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_2^{f,a}(x)}{|x-a|^2} = 0.$$

Poznámka: Lze definovat i Taylorovy polynomy řádu k pomocí k-tých parciálních derivací a pro $f \in C^k$ dobře aproximují f.

Věta L 10.14 (o pozitivně definitní kvadratické formě)**.** *Nechť $Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je pozitivně definitní kvadratická forma. Potom*

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall h \in \mathbf{R}^n:\ \ Q(h,h) \geq \varepsilon |h|^2.$$

Věta T 10.15 (postačující podmínky pro lokální extrém)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $a \in G$ a nechť $f \in C^2(G)$. Nechť $Df(a) = 0$ (tedy a je bod podezřelý na lokální extrém).*

(i) Je-li $D^2 f(a)$ pozitivně definitní, pak a je bod lokálního minima.

(ii) Je-li $D^2 f(a)$ negativně definitní, pak a je bod lokálního maxima.

(iii) Je-li $D^2 f(a)$ indefinitní, pak v a není extrém.

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ na $\mathbf{R}^2$.

Konec 9. přednášky 1.11.

10.4. Implicitní funkce a vázané extrémy

Věta T 10.16 (o implicitní funkci)**.** *Nechť $p \in \mathbf{N}$, $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F : G \to \mathbf{R}$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}$, $(\tilde{x},\tilde{y}) \in G$ a nechť platí:*

(i) $F \in C^p(G)$,

(ii) $F(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$,

(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y}) \neq 0$.

Pak existuje okolí $U \subset \mathbf{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbf{R}$ bodu $\tilde{y}$ tak, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x,y) = 0$. Píšeme-li $y = \varphi(x)$, pak $\varphi \in C^p(U)$ a platí

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))} \quad \text{pro všechna } x \in U \text{ a } j = 1,\dots,n.$$

Poznámka: Navíc platí, že je-li $F \in C^k$, pak $\varphi \in C^k$ a derivace φ lze spočítat derivováním vztahu $F(x,\varphi(x)) = 0$.

Příklad: Nechť

$$M := \big\{[x,y] \in \mathbf{R}^2:\ x^3 + y^3 - 2xy = 0\big\}.$$

Ukažte, že na jistém okolí $[1,1]$ lze M napsat jako graf $\varphi(x)$. Spočtěte $\varphi'(1)$ a $\varphi''(1)$.

Konec 10. přednášky 4.11.

Věta BD 10.17 (o implicitních funkcích - BD)**.** *Nechť $n,m \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{N}$, $G \subset \mathbf{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F_j : G \to \mathbf{R}$, $j = 1,\dots,m$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}^m$, $(\tilde{x},\tilde{y}) \in G$ a nechť platí:*

(i) $F_j \in C^p(G)$ pro $j = 1,\dots,m$,

(ii) $F_j(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$, tedy $F_j(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n,\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_m) = 0$ pro $j = 1,\dots,m$,

(iii) determinant $m \times m$ matice parciálních derivací F_j je nenulový, tedy

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x},\tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{x},\tilde{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{x},\tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{x},\tilde{y}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak existuje okolí $U \subset \mathbf{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbf{R}^m$ bodu $\tilde{y}$ tak, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F_j(x,y) = 0$ pro každé $j = 1,\dots,m$. Píšeme-li $y_j = \varphi_j(x)$, pak $\varphi_j \in C^p(U)$ pro $j = 1\dots,m$.

Příklad: Dokažte, že existují funkce $z(x,y)$, $t(x,y)$, které jsou třídy C^2 na nějakém okolí bodu $[1,-1]$ splňující $z(1,-1) = 2$, $t(1,-1) = 0$ a

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 = 0, \quad x + y + z - t - 2 = 0.$$

Spočtěte druhé derivace z a t.

Věta T 10.18 (Lagrangeova věta o vázaných extrémech)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $m < n, f, g_1, \dots, g_m \in C^1(G)$ a mějme množinu*

$$M = \big\{z \in \mathbf{R}^n : g_1(z) = \dots = g_s(z) = 0\big\}.$$

Je-li $a \in M$ bodem lokálního extrému f vzhledem k M a vektory

$$\Big(\frac{\partial g_1}{\partial z_1}(a),\ \frac{\partial g_1}{\partial z_2}(a), \dots, \frac{\partial g_1}{\partial z_n}(a)\Big)$$
$$\vdots$$
$$\Big(\frac{\partial g_m}{\partial z_1}(a),\ \frac{\partial g_m}{\partial z_2}(a), \dots, \frac{\partial g_m}{\partial z_n}(a)\Big)$$

jsou lineárně nezávislé, pak existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tak, že

$$Df(a) + \lambda_1 Dg_1(a) + \ldots + \lambda_m Dg_m(a) = 0$$

neboli

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}(a) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial z_1}(a) + \ldots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial z_1}(a) = 0,$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial f}{\partial z_n}(a) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial z_n}(a) + \ldots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial z_n}(a) = 0.$$

Konec 11. přednášky 8.11.

Příklad: 1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ na $M := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.
2. Sněhulák.

Poznámka: Předchozí věta nám říká, že pokud extrém existuje, tak ho umíme najít z nějaké rovnice. Věta ale nezaručuje existenci extrému!

Připomeň: 1. Nechť $K \subset \mathbf{R}^n$. Pak

$$K \text{ je kompaktní} \Leftrightarrow K \text{ je omezená a uzavřená.}$$

2. Nechť $K \subset \mathbf{R}^n$ je kompaktní a $f : K \to \mathbf{R}$ je spojitá. Pak f nabývá na K svého maxima a minima.
3. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $f : G \to \mathbf{R}$ má v $a \in G$ extrém a existuje parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Pak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

10.5. Regulární zobrazení

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $f : G \to \mathbf{R}^n$. Řekneme, že f je *difeomorfismus* na G, jestliže je f prostá na G, $U = f(G)$ je otevřená množina v $\mathbf{R}^n$, $f \in C^1(G)$ a $f^{-1} \in C^1(U)$.

Věta T 10.19 (o lokálním difeomorfismu)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $f : G \to \mathbf{R}^n$ je třídy C^1. Nechť pro $a \in G$ platí $J_f(a) \neq 0$. Pak existuje $U \subset G$ okolí a takové, že $f|_U$ je difeomorfismus na U.*

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $f : G \to \mathbf{R}^n$. Řekneme, že f je regulární zobrazení, jestliže $f \in C^1(G)$ a pro každé $a \in G$ platí $J_f(a) \neq 0$.

11. Metrické prostory II

11.1. Více o kompaktních a úplných prostorech

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $K \subset P$. Řekneme, že K je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti prvků K lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v K.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Nechť $\varepsilon > 0$ a $H \subset P$. Řekneme, že H je *ε-síť* prostoru P, pokud

$$P \subset \bigcup_{x \in H} B(x, \varepsilon).$$

Řekneme, že P je *totálně omezený*, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť prostoru P.

Příklady: 1. $([0,1], |.|)$ a $((0,1), |.|)$ jsou totálně omezené.
2. $([0,1]^2, |.|)$ je totálně omezená.
3. $([0,1], \varrho_{diskr})$ není totálně omezená.

Věta L 11.1 (omezenost a totální omezenost)**.** *Nechť (P, ϱ) je totálně omezený metrický prostor. Potom je P omezený.*

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že P je *kompaktní metrický prostor*, je-li P kompaktní množina v (P, ϱ).

Konec 12. přednášky 11.11.

Věta L 11.2 (kompaktnost a totální omezenost)**.** *Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom je P totálně omezený.*

Věta T 11.3 (kompaktnost a otevřené pokrytí)**.** *Metrický prostor (P, ϱ) je kompaktní právě tehdy, když z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí. Tedy platí*

$$P \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \text{ pro libovolnou indexovou množinu } A,\ G_\alpha \text{ otevřené } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ existuje konečná } A_0 \subset A \text{ tak , že } P \subset \bigcup_{\alpha \in A_0} G_\alpha.$$

Důsledek (Borel): Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je systém otevřených intervalů. Pak

$$[a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha \Rightarrow \text{ existuje konečná } A_0 \subset A \text{ tak , že } [a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A_0} I_\alpha.$$

Důsledek: Každá spojitá funkce na $[a, b]$ je stejnoměrně spojitá.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost bodů z P. Řekneme, že x_n *splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku* (případně, že je cauchyovská), jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall m, n \in \mathbf{N},\ m, n \geq n_0 :\ \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Poznámka: Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.

Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je úplný, jestliže každá cauchyovská posloupnost bodů z P je konvergentní.

Příklad: Metrický prostor $l^2 := \left\{ \{a_n\}_{n=1}^\infty :\ a_n \in \mathbf{R},\ \sum_{n=1}^\infty a_n^2 < \infty \right\}$ s metrikou

$$\varrho(\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty) = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty (a_n - b_n)^2}$$

je úplný.

Konec 13. přednášky 15.11.

Věta L 11.4 (Cantorova věta o vnořených množinách)**.** *Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor a F_n je posloupnost neprázdných uzavřených množin v P takových, že $F_{n+1} \subset F_n$ a $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$. Pak $\bigcap_{n=1}^\infty F_n$ je jednobodová množina.*

Dotazy: Platí tato věta bez předpokladu a) úplnosti P, b) uzavřenosti F_n, c) podmínky $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$?

Věta T 11.5 (o totální omezenosti a úplnosti)**.** *Metrický prostor (P, ϱ) je kompaktní právě tehdy, když je totálně omezený a úplný.*

Věta L 11.6 (o zúplnění metrického prostoru)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak existuje úplný metrický prostor $(\tilde{P}, \tilde{\varrho})$ tak, že $P \subset \tilde{P}$ a pro všechna $x, y \in P$ platí $\varrho(x, y) = \tilde{\varrho}(x, y)$.*

Konec 14. přednášky 18.11.

Věta T 11.7 (Arzela-Ascoli)**.** *Nechť $A \subset C([0, 1])$. Pak $\overline{A}$ je kompaktní právě tehdy, když jsou funkce z A stejně omezené a stejně stejnoměrně spojité. Tedy pokud existuje $K > 0$ tak, že*

$$\forall f \in A,\ \forall x \in [0, 1] : |f(x)| \leq K$$

a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in [0, 1], \forall f \in A : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

11.2. Prostory L^p

Poznámka: Většina vět této subsekce i s důkazy se dá najít v knize W. Rudin: Analýza v reálném a komplexním oboru.

Věta L 11.8 (Jensenova nerovnost)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je pravděpodobnostní prostor, $f \in L^1(\mu)$, $a, b \in [-\infty, \infty]$ a $f : X \to (a, b)$. Je-li $\varphi : (a, b) \to \mathbf{R}$ konvexní funkce, pak*

$$\varphi\Big(\int_X f\, d\mu\Big) \leq \int_X (\varphi \circ f)\, d\mu.$$

Příklad: Důkaz AG nerovnosti.

Definice. Nechť $1 < p < \infty$, pak číslo q splňující $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ nazveme *sdružený exponent.* Pro $p = 1$ definujeme $q = \infty$ a pro $p = \infty$ definujeme $q = 1$.

Příklad: $\forall a, b \geq 0 :\ ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$

Konec 15. přednášky 22.11.

Věta T 11.9 (Hölderova a Minkovského nerovnost)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $1 < p < \infty$, q je sdružený exponent k p a $f, g : X \to [0, \infty]$ jsou měřitelné funkce. Potom platí Hölderova nerovnost*

$$\int_X fg \, d\mu \leq \Big(\int_X f^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_X g^q \, d\mu \Big)^{\frac{1}{q}}$$

a Minkowského nerovnost

$$\Big(\int_X (f+g)^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_X f^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_X g^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $1 \leq p < \infty$. Definujeme *prostor L^p* jako

$$L^p(X, \mu) := \{ f : X \to \mathbf{R} : \ \|f\|_{L^p} < \infty \},$$

kde

$$\|f\|_{L^p} = \Big(\int_X |f|^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Definice. Nechť $g : X \to [0, \infty]$ je měřitelná. *Esenciální supremum* g definujeme jako

$$\operatorname{esssup} g := \inf \big\{ \alpha : \ \mu(g > \alpha) = 0 \big\}.$$

Prostor $L^\infty(X, \mu)$ definujeme jako

$$L^\infty(X, \mu) := \{ f : X \to \mathbf{R} : \ \|f\|_{L^\infty} := \operatorname{esssup} |f| < \infty \}.$$

Poznámka:

$$\operatorname{esssup} g = \inf_{\mu(N) = 0} \sup g(X \setminus N).$$

Věta L 11.10 (Trojúhelníková nerovnost v L^p)**.** *Nechť $1 \leq p \leq \infty$. Pak pro $f, g \in L^p(X, \mu)$ platí*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Poznámka: Víme, že L^p je lineární vektorový prostor ($f, g \in L^p$ a $\alpha \in \mathbf{R}$, pak $f + g \in L^p$ a $\alpha f \in L^p$). Místo funkcí z L^p budeme uvažovat třídy ekvivalence vzhledem k rovnosti skoro všude. Na tomto prostoru (na třídách ekvivalence) je $\|f\|_{L^p}$ norma. Takto chápaný L^p je metrický prostor s metrikou

$$\varrho(f, g) = \|f - g\|_{L^p}.$$

Věta T 11.11 (Úplnost L^p prostorů - důkaz jen pro $p < \infty$)**.** *Nechť $1 \leq p \leq \infty$. Pak prostor $L^p(X, \mu)$ je úplný.*

Poznámka: Z důkazu předchozí věty plyne, že pokud $f_k \to k$ v L^p, $1 \leq p < \infty$, pak existuje podposloupnost f_{k_j} tak, že $f_{k_j}(x) \to f(x)$ pro skoro všechna $x \in X$.

Konec 16. přednášky 25.11.

11.3. Husté a řídké množiny

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset P$ je *hustá*, pokud $\overline{A} = P$.

Připomeň: 1. $\overline{A} = \{ x \in P : \varrho(x, A) = 0 \} = \{ x \in P : \exists x_n \in A, x_n \to x \}$.
2. $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$. 3. $\overline{A}$ je uzavřená množina.

Příklady: 1) $\mathbf{Q}$ je hustá v $\mathbf{R}$.
2) $\mathbf{Q}^2$ je hustá v $\mathbf{R}^2$.
3) polynomy jsou husté v $C([0, 1])$.
4) Může být průnik dvou hustých množin prázdná množina?

Věta L 11.12 (charakterizace hustých množin)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Potom je $A \subset P$ je hustá právě tehdy, když pro každou otevřenou neprázdnou množinu $G \subset P$ platí $G \cap A \neq \emptyset$.*

Důsledek: Nechť $G_1, \ G_2 \subset P$ jsou otevřené a husté v (P, ϱ). Pak $G_1 \cap G_2$ je otevřená a hustá v P.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset P$ je *řídká*, jestliže $P \setminus \overline{A}$ je hustá.

Příklady: 1) $\mathbf{N}$ je řídká v $\mathbf{R}$.
2) $\mathbf{Q}$ není řídká v $\mathbf{R}$.
3) $\mathbf{R} \times \{0\}$ je řídká v $\mathbf{R}^2$
4) Cantorovo diskontinuum je řídké v $[0, 1]$.

Věta L 11.13 (vlastnosti řídkých množin)**.** *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a nechť $A,\ B \subset P$. Potom*

(a) *Je-li A řídká v P a $B \subset A$, pak je také B řídká v P,*
(b) *Jsou-li A a B řídké v P, pak $A \cup B$ je řídká v P*
(c) *A je řídká v P právě tehdy, když $\overline{A}$ je řídká v P.*

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset P$ je *1. kategorie*, jestliže existují řídké množiny A_n tak, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Řekneme, že $C \subset P$ je *2. kategorie*, jestliže C není první kategorie v P.

Příklady: 1) $\mathbf{Q}$ je 1. kategorie v $\mathbf{R}$.
2) $\mathbf{Q} \times \mathbf{R}$ je 1. kategorie v $\mathbf{R}^2$.
3) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ je 2. kategorie v $\mathbf{R}$.

Konec 17. přednášky 2.12.

Věta T 11.14 (Baire)**.** *Nechť (P,ϱ) je úplný metrický prostor. Nechť G_n, $n \in \mathbf{N}$, jsou otevřené a husté v (P,ϱ). Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ je hustá v (P,ϱ).*

Důsledek: Úplný metrický prostore není první kategorie sám v sobě.

Příklad: Existují $A \cup N = [0,1]$ tak, že A je 1. kategorie a N má nulovou míru?

Věta T 11.15 (o nediferencovatelné funkci)**.** *Existuje spojitá funkce $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, která nemá derivaci v žádném bodě z $(0,1)$.*

Konec 18. přednášky 2.12.

12. Hilbertovy prostory

Poznámka: Většina vět této sekce i s důkazy se dá najít v knize W. Rudin: Analýza v reálném a komplexním oboru.

12.1. Základní definice

Definice. Nechť H je reálný vektorový prostor. Řekneme, že H je *prostor se skalárním součinem*, jestliže existuje zobrazení $\langle\cdot,\cdot\rangle : H^2 \to \mathbf{R}$ takové, že

(i) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ pro všechna $x,y \in H$,
(ii) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$ pro všechna $x,y,z \in H$,
(iii) $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ pro všechna $x,y \in H$ a $\alpha \in \mathbf{R}$,
(iv) $\langle x,x\rangle \geq 0$ pro všechna $x,y \in H$,
(v) $\langle x,x\rangle = 0$ jenom tehdy, když $x = 0$.

Definujme $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Řekneme, že prvek $x \in H$ je *ortogonální* k $y \in H$, pokud $\langle x,y\rangle = 0$.

Věta L 12.1 (Schwarzova nerovnost)**.** *Pro každé $x,y \in H$ platí*

$$\langle x,y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Věta L 12.2 (trojúhelníková nerovnost)**.** *Pro každé $x,y \in H$ platí*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Specielně $(H,\|\cdot\|)$ tvoří metrický prostor ($\varrho(x,y) = \|x-y\|$).

Definice. Nechť H prostor se skalárním součinem. Řekneme, že H je *Hilbertův prostor*, pokud je metrický prostor $(H,\|\cdot\|)$ úplný.

Příklady: (1) $(\mathbf{R}^n,\varrho_e)$ je Hilbertův prostor
(2) $l^2 := \left\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} :\ a_n \in \mathbf{R},\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty\right\}$ se skalárním součinem

$$\langle \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

je Hilbertův prostor.
(3) $L^2(0,1) := \{f : (0,1) \to \mathbf{R} :\ (L)\int_0^1 |f(x)|^2\,dx < \infty\}$ se skalárním součinem

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

je Hilbertův prostor.

Věta L 12.3 (spojitost skalárního součinu). *Nechť H je Hilbertův prostor, potom jsou zobrazení $x \to \langle x, y\rangle$, $x \to \langle y, x\rangle$, $x \to \|x\|$ spojitá na H.*

Definice. Nechť H je Hilbertův prostor a $E \subset H$. Řekneme, že E je konvexní, jestliže pro všechna $x, y \in E$ a $t \in [0,1]$ platí
$$tx + (1-t)y \in E.$$

Věta L 12.4 (o existenci prvku z nejmenší normou). *Nechť H je Hilbertův prostor a $E \subset H$ je konvexní a uzavřená. Potom existuje právě jeden prvek v E s nejmenší normou.*

Definice. Nechť $M \subset H$ je lineární podprostor Hilbertova prostoru H. Definujeme *ortogonální podprostor*
$$M^{\perp} = \{y \in H : \ \langle x, y\rangle = 0 \text{ pro všechna } x \in M\}.$$

Konec 19. přednášky 6.12.

Věta T 12.5 (o projekci na podprostor). *Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H.*

(i) Každý prvek $x \in H$ má jednoznačný rozklad $x = P(x) + Q(x)$ tak, že $P(x) \in M$ a $Q(x) \in M^{\perp}$.

(ii) $P(x)$ je bod z M nejbližší k $x, Q(x)$ je bod z $M^{\perp}$ nejbližší k x.

(iii) Zobrazení $P : H \to M$ a $Q : H \to M^{\perp}$ jsou lineární.

(iv) $\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2$.

Důsledek: Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H a $M \neq H$. Pak existuje $y \in M^{\perp}$, $y \neq 0$.

Příklad: Metoda nejmenších čtverců.
Příklad: 1) Nechť M je konečnědimenzionální podprostor Hilbertova prostoru H. Pak M je uzavřený.
2) Spojité funkce $C([0,1])$ tvoří lineární podprostor $L^2(0,1)$, který není uzavřený.
3) $A = \big\{(q_1, q_2, \dots, q_k, 0, 0, \dots) : \ k \in \mathbf{N}, \ q_i \in \mathbf{Q} \text{ pro } i = 1, \dots, k\big\}$ je lineární podprostor l^2, který není uzavřený.

Věta L 12.6 (o reprezentaci lineárního funkcionálu). *Nechť H je Hilbertův prostor $L : H \to \mathbf{R}$ je spojité lineární zobrazení. Pak existuje právě jedno $y \in H$ tak, že*
$$L(x) = \langle x, y\rangle.$$

12.2. Rozklad do Schauderovy báze

Definice. Nechť H je Hilbertův prostor a A je indexová množina. Množina prvků $u_\alpha \in H$, kde $\alpha \in A$, se nazývá *ortogonální*, pokud
$$\langle u_\alpha, u_\beta\rangle = 0 \text{ pro všechna } \alpha, \ \beta \in A.$$
Ortogonální množina $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ se nazývá *ortonormální*, pokud navíc $\|u_\alpha\| = 1$ pro všechna $\alpha \in A$.

Jestliže $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je ortonormální množina, pak pro každé $x \in H$ definujeme *Fourierovy koeficienty* x vzhledem k u_α jako
$$\hat{x}(\alpha) = \langle x, u_\alpha\rangle.$$

Konec 20. přednášky 9.12.

Věta L 12.7 (o konečné ortonormální množině). *Nechť H je Hilbertův prostor, $\{u_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ je ortonormální množina a $i_0 \in \mathbf{N}$. Označme M_F lineární obal $\{u_1, u_2, \dots, u_{i_0}\}$.*

(i) Nechť $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ je 0 pro $i > i_0$. Pro vektor $y = \sum_{i=1}^{i_0} \varphi(i) u_i$ platí
$$\hat{y}(i) = \varphi(i) \text{ pro každé } i \in \mathbf{N} \text{ a } \|y\|^2 = \sum_{i=1}^{i_0} |\varphi(i)|^2.$$

(ii) Je-li $x \in H$ a $s_F(x) = \sum_{i=1}^{i_0} \hat{x}(i) u_i$, pak $s_F(x) = P(x)$, kde P je projekce na M_F.

Navíc platí $$\sum_{i=1}^{i_0} |\hat{x}(i)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Definice. Nechť (X, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset X$ je *hustá*, pokud $\overline{A} = X$.

Příklady: 1) $\mathbf{Q}$ je hustá v $\mathbf{R}$.
2) $A = \big\{(q_1, q_2, \dots, q_k, 0, 0, \dots) : \ k \in \mathbf{N}, \ q_i \in \mathbf{Q} \text{ pro } i = 1, \dots, k\big\}$ je hustá v l^2.
3) Jednoduché funkce jsou husté v $L^2(0,1)$?
4) Jsou spojité funkce $C([0,1])$ husté v $L^2(0,1)$?

Lemma 12.8. *Nechť X, Y jsou metrické prostory, X je úplný a $f : X \to Y$ je spojité. Nechť X_0 je hustá podmnožina X, na které je f izometrie, a nechť $f(X_0)$ je hustá podmnožina Y. Potom f je izometrie X na Y.*

Věta L 12.9 (Riesz-Fischerova věta). *Nechť H je Hilbertův prostor a $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ je ortonormální množina. Nechť P je prostor všech konečných lineárních kombinací vektorů u_i. Potom pro každé $x \in H$ platí nerovnost*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}_i|^2 \le \|x\|^2.$$

Zobrazení $x \to \hat{x}$ je spojité lineární zobrazení H na l^2, jehož restrikce na uzávěr $\overline{P}$ je izometrie $\overline{P}$ na l^2.

Důsledek: $L^2(0,1)$ je izometricky izomorfní l^2.

Konec 21. přednášky 13.12.

Definice. Nechť H je Hilbertův prostor a $h_i \in H$, $i \in \mathbf{N}$. Řekneme, že řada $\sum_{i=1}^{\infty} h_i$ *konverguje* k $s \in H$, pokud

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| s - \sum_{i=1}^{n} h_i \Big\| = 0.$$

Věta T 12.10 (o maximální ortonormální množině). *Nechť H je Hilbertův prostor a $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ je ortonormální množina. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(*i*) *$\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ je maximální ortonormální množina v H.*

(*ii*) *Množina P všech konečných lineárních kombinací prvků z $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ je hustá v H.*

(*iii*) *Pro každé $x \in H$ platí $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}_i|^2$.*

(*iv*) *Je-li $x, y \in H$, potom $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i \hat{y}_i$.*

(*v*) *Pro každé $x \in H$ platí $x = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i \, u_i$.*

Poznámka: Analogie této věty platí i pro Hilbertův prostor s "nespočetnou bází". Jen je potřeba správně zadefinovat výrazy jako $\sum_{\alpha\in A} |\hat{x}(\alpha)|^2$ a $\sum_{\alpha\in A} \hat{x}(\alpha)\, u_\alpha$.

12.3. Trigonometrické řady

Definice. Nechť $f \in L^2(0, 2\pi)$. Potom čísla

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \text{ pro } k \in \mathbf{N}_0 \text{ a}$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \text{ pro } k \in \mathbf{N}.$$

nazýváme *Fourierovy koeficienty* funkce f. Trigonometrickou řadu

$$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

nazýváme *Fourierovou řadou funkce f.*

Věta L 12.11 (o ortogonalitě trigonometrických funkcí). *Nechť $n, m \in \mathbf{N}$, pak*

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \begin{cases} 0 \text{ pro } m \neq n \\ \pi \text{ pro } m = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \begin{cases} 0 \text{ pro } m \neq n \\ \pi \text{ pro } m = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx = 0 \ .$$

Věta T 12.12 (o maximalitě trigonometrických funkcí - BD)**.** *Systém trigonometrických funkcí*

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\right\}_{n=1}^{\infty},\ \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\right\}_{n=1}^{\infty}\ a\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

tvoří maximální ortonormální množinu v $L^2(0,2\pi)$*. Tedy jediné* $f\in L^2(0,2\pi)$ *takové, že*

$$\int_0^{2\pi} f(x)\ \sin(nx)\,dx = 0\ \forall n\in\mathbf{N}\ a\ \int_0^{2\pi} f(x)\ \cos(nx)\,dx = 0\ \forall n\in\mathbf{N}_0$$

je identicky nulová funkce.

Z Věty 12.10 dostáváme:
Důsledek: Pro každé $f\in L^2(0,2\pi)$ a a_k, b_k jsou Fourierovy koeficienty f. Pak platí

$$f(x) = F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

ve smyslu rovnosti rovnosti L^2 funkcí. Tedy v příslušném metrickém prostoru platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

Navíc platí Parsevalova rovnost

$$\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx = \pi\frac{a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$

Specielně tedy dostáváme, že trigonometrické polynomy jsou husté v L^2, a tedy spojité funkce $C([0,2\pi])$ jsou husté v $L^2(0,2\pi)$.

Aplikace: 1) mp3 2) jpeg
3) Existují i jiné báze vhodnější pro práci s obrázky - například Rademacherova báze

Konec 22. přednášky 22.12.

11.4. Separabilní metrické prostory

Definice. Metrický prostor (P,ϱ) se nazývá *separabilní*, jestliže existuje spočetná množina $A\subset P$, která jeho hustá v P.

Příklady: (i) $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$ jsou separabilní,
(ii) $(C([0,1]),\sup)$ je separabilní,
(iii) $\ell^p := \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty\}$ je separabilní pro $1\le p<\infty$,
(iv) $L^2(0,1)$ je separabilní.

Věta L 11.16 (nutná podmínka separability)**.** *Nechť* (P,ϱ) *je metrický prostor. Nechť existují nespočetná množina* A *a* $\delta>0$ *taková, že pro každá* $x,y\in A$, $x\neq y$, *platí* $\varrho(x,y)\ge\delta$*. Potom* P *není separabilní.*

Příklady: (i) $\ell^\infty = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{N},\ \sup_{n\in\mathbf{N}}|x_n|<\infty\}$ není separabilní,
(ii) $(C((0,1)),\sup)$ není separabilní.
(iii) L^∞ není separabilní.

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $\mathcal{B}$ je nějaký systém otevřených podmnožin P. Řekneme, že $\mathcal{B}$ je *báze otevřených množin* (P,ϱ), jestliže pro každou otevřenou množinu $G\subset P$ existuje $\mathcal{B}^*\subset\mathcal{B}$ taková, že $\bigcup\mathcal{B}^* = G$.

Věta L 11.17 (charakterizace separabilních prostorů)**.** *Metrický prostor je separabilní právě tehdy, když v něm existuje spočetná báze otevřených množin.*

Věta L 11.18 (vztah totální omezenosti a separability)**.** *Nechť je metrický prostor* (P,ϱ) *totálně omezený, pak je separabilní.*