Zkoušková písemka z NMAA103 - 20.12.2024

Na každý papír napište: 1. Číslo příkladu 2. Jméno

1.(15 bodů) Nalezněte obecné řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$y' = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} y.$$

2.(10 bodů) Dokažte, že na určitém okolí bodu $[x, y, z] = [1, 1, 1]$ existuje funkce $z(x, y)$ tak, že

$$x^2 + y^2 + z^2 = \log(xyz) + 3.$$

Spočtěte z_x, z_y, z_{xx} a z_{xy} v tomto bodě.

3.(15 bodů) Nalezněte maximum a minimum funkce

$$f(x, y, z) = x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 + z^2 \text{ na množině } M := \big\{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\big\}.$$

Pokud o nějaké množině tvrdíte, že je kompaktní, tak to dokažte.

4.(10 bodů) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy je dokažte, nebo sestrojte protipříklad):

a) Nechť $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je spojitá a rostoucí a $K \subset \mathbf{R}$ je kompakt. Pak $f^{-1}(K)$ je kompakt.

b) Nechť $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je spojitá a rostoucí a $K \subset f(\mathbf{R})$ je kompakt. Pak $f^{-1}(K)$ je kompakt.

c) Nechť $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ je spojitá a $K \subset \mathbf{R}$ je kompakt. Pak $f^{-1}(K)$ je kompakt.

Přeji Vám mnoho štěstí.

Zkoušková písemka z NMAA103 - 20.12.2024

Na každý papír napište: 1. Číslo příkladu 2. Jméno

1.(10 bodů) Nalezněte obecné řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$y' = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} y.$$

2.(15 bodů) Dokažte, že na určitém okolí bodu $[x, y, z] = [1, 1, 1]$ existuje funkce $z(x, y)$ tak, že

$$x^2 + y^2 + z^2 = \log(xyz) + 3.$$

Spočtěte z_x, z_y, z_{xx} a z_{xy} v tomto bodě.

3.(15 bodů) Nalezněte maximum a minimum funkce

$$f(x, y, z) = x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 + z^2 \text{ na množině } M := \big\{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\big\}.$$

Pokud o nějaké množině tvrdíte, že je kompaktní, tak to dokažte.

4.(10 bodů) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy je dokažte, nebo sestrojte protipříklad):

a) Nechť $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je spojitá a rostoucí a $K \subset \mathbf{R}$ je kompakt. Pak $f^{-1}(K)$ je kompakt.

b) Nechť $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je spojitá a rostoucí a $K \subset f(\mathbf{R})$ je kompakt. Pak $f^{-1}(K)$ je kompakt.

c) Nechť $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ je spojitá a $K \subset \mathbf{R}$ je kompakt. Pak $f^{-1}(K)$ je kompakt.

Přeji Vám mnoho štěstí.