1. cvičení

U následujících diferenciálních rovnic nebo soustav diferenciálních rovnic nalezněte obecné řešení popřípadě řešení vyhovující počáteční podmínce:

$$1.\ y' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y; \quad 2.\ y' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} y$$

$$3.\ y' = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -13 & -8 \end{pmatrix} y; \quad 4.\ y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} y$$

Výsledky a návody:

$$1.\ C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}\ .$$

$$2.\ C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-x}.$$

$$3.\ C_1 \begin{pmatrix} 5\cos x \\ -8\cos x - \sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5\sin x \\ \cos x - 8\sin x \end{pmatrix};$$ K vlastnímu číslu $\lambda_1 = i$ odpovídá vlastní vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ i-8 \end{pmatrix}$ a k $\lambda_2 = -i$ vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ -i-8 \end{pmatrix}$.

$$4.\ C_1 \begin{pmatrix} \sin x + 3\cos x \\ 2\sin x + \cos x \\ -\sin x + 2\cos x \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 3\sin x - \cos x \\ \sin x - 2\cos x \\ 2\sin x + \cos x \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}.$$

T1. Rozhodněte o otevřenosti a uzavřenosti následujících množin $(0,1)$, $[0,1)$, $\{1\}$, $[1,\infty)$ v $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ a $[0,1)$ v $\mathbf{R}$ s diskrétní metrikou.

T2. Existuje $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$ a $A \neq \mathbf{R}$ taková, že A je zároveň otevřená i uzavřená?

2. cvičení

Nalezněte řešení následujících soustav diferenciálních rovnic popřípadě řešení vyhovující počáteční podmínce:

$$1.\ y' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y \text{ a nechť } y_1(0) = 3 \text{ a } y_2(0) = 1; \quad 2.\ y' = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 9 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix} y;$$

$$3.\ y' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} y \text{ a nechť } y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$4.\ y' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} y.$$

Výsledky a návody:

$$1.\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + 2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) e^{2x}.$$

$$2.\ C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} x+2 \\ -2x \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_3 \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} + 2x - 1 \\ -x^2 + 1 \\ x \end{pmatrix} e^{2x}.$$

3. $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x-1\\2\\x\end{pmatrix}e^{-x}$; obecné řešení $C_1\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{-x}+C_3\begin{pmatrix}x-1\\2\\x\end{pmatrix}e^{-x}$.

$$4.\ C_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}e^{-x}+C_2\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}e^{-x}+C_3\begin{pmatrix}-x+1\\1\\0\\-x\end{pmatrix}e^{-x}+C_4\begin{pmatrix}-\frac{x^2}{2}+x\\x-1\\1\\-\frac{x^2}{2}\end{pmatrix}e^{-x};$$

$$\text{Vlastní čísla } \lambda_{1,2,3,4}=-1 \text{ a vlastní vektory } \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Z jejich lineární kombinace $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$ existuje pokračující vektor $\begin{pmatrix}c\\1\\0\\d\end{pmatrix}$ pro $c,d\in\mathbf{R}$.

Nalezneme $c,d,$ aby šlo dále pokračovat. A to z $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ pokračujeme $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

T1. Ukažte, že metriky $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ a $\|.\|_\infty$ jsou na $\mathbf{R}^n$ ekvivalentní. Dokažte tedy, že pro každé $x\in\mathbf{R}$ platí

$$\frac{1}{n}\|x\|_1\le\|x\|_\infty\le\|x\|_2\le\|x\|_1.$$

T2. Dokažte, že množina $G\subset\mathbf{R}$ je otevřená v $(\mathbf{R},|.|)$, právě tehdy, když je spočetným sjednocením otevřených intervalů.

3. cvičení

Vyšetřete uzavřenost a otevřenost následujících množin:

$$1.\ \{2x^2+y^2<1\},\quad 2.\ \{xy^2\ge 1,\ x\ge -1\}.$$

Nalezněte řešení následujících soustav diferenciálních rovnic popřípadě řešení vyhovující počáteční podmínce:

3. $y'=\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}4e^{5x}\\0\end{pmatrix}$ a $y(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; 4. $y'=\begin{pmatrix}2&-1&2\\1&0&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}e^{2x}\\0\\0\end{pmatrix}$;

$$5.\ y'=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}2e^x\\2\sin x\end{pmatrix};\quad 6.\ y'=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}4\sin x\\0\end{pmatrix};$$

$$7.\ y'=\begin{pmatrix}-1&2\\-3&4\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}0\\\frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\end{pmatrix}.$$

Výsledky a návody:

1. Otevřená . 2. Uzavřená; Průnik dvou uzavřených.

3. $-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{4x}+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{5x}$; Obecné řešení je $C_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^x+C_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{4x}+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{5x}$.

$$4.\ C_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}e^{-x}+C_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{x}+C_3\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}e^{x}+\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}e^{2x}.$$

$$5.\ C_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^x+C_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{3x}+\begin{pmatrix}x-1\\-x\end{pmatrix}e^x+\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x\\-\frac{3}{5}\cos x-\frac{4}{5}\sin x\end{pmatrix};$$

Řešení s pravou stranou $\begin{pmatrix} 2e^x \\ 0 \end{pmatrix}$ hledáme ve tvaru $\begin{pmatrix} a+bx \\ c+dx \end{pmatrix} e^x$ a řešení s pravou stranou $\begin{pmatrix} 0 \\ 2\sin x \end{pmatrix}$ hledáme ve tvaru $\begin{pmatrix} a\sin x + b\cos x \\ c\sin x + d\cos x \end{pmatrix}$.

Jedno partikulární řešení dostaneme součtem těchto dvou řešení.

6. $C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\cos x + 2x\sin x \\ 2x\cos x \end{pmatrix}$;

Řešení s pravou stranou $\begin{pmatrix} 4\sin x \\ 0 \end{pmatrix}$ hledáme ve tvaru $\begin{pmatrix} a+bx \\ c+dx \end{pmatrix} \cos x + \begin{pmatrix} e+fx \\ g+hx \end{pmatrix} \sin x$.

To je docela otravné, a proto je možná lepší použít variaci konstant.

Nechť $y_0(x) = C_1(x) \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2(x) \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$. Po dosazení dostaneme

$C_1'(x) \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2'(x) \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sin x \\ 0 \end{pmatrix}$. Vynásobíme první rovnici $\sin x$ a druhou $\cos x$.

Po sečtení těchto rovnic dostaneme $C_2'(x) = 4\sin^2 x$ a standartně dopočteme.

7. $C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} -e^x \log(e^{2x}+1) + 2e^{2x} \arctan e^x \\ -e^x \log(e^{2x}+1) + 3e^{2x} \arctan e^x \end{pmatrix}$

Partikulární řešení hledáme ve tvaru $C_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + C_2(x) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2x}$.

T1. Nechť $A, B \subset \mathbf{R}$ a na $\mathbf{R}$ (a $\mathbf{R}^2$) máme euklidovskou metriku. Rozhodněte o platnosti:

(i) A, B jsou otevřené $\implies A \times B$ je otevřená v $\mathbf{R}^2$.

(i) A, B jsou uzavřené $\implies A \times B$ je uzavřené v $\mathbf{R}^2$.

T2. Nechť $A, B \subset \mathbf{R}$ a na $\mathbf{R}$ (a $\mathbf{R}^2$) máme euklidovskou metriku. Rozhodněte o platnosti:

(i) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ v $\mathbf{R}^2$.

(i) $\operatorname{int}(A \times B) = \operatorname{int} A \times \operatorname{int} B$ v $\mathbf{R}^2$.

V (i) může být užitečné si nejprve dokázat $\overline{A} = \{x \in P :\ \exists x_n \in A, \text{ že } x_n \to x\}$.

4. cvičení

Rozhodněte, jestli jsou následující množiny kompaktní:

1. $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 :\ x^6 + y^6 \le 1\}$, 2. $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 :\ x^3 + y^3 \le 1\}$,

11. $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 :\ x^4 + y^4 - 4xy = 0\}$, 12. $\{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3 :\ x+y+z = 5,\ xy+yz+zx = 8\}$.

Rozhodněte, jestli existuje $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)$ *pro:*

$$3.\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad 4.\ \frac{x^3}{x^2+y^2}, \quad 5.\ \frac{xy}{x^2+y^2},$$

$$6.\ \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, \quad 9.\ (x^2+y^2)^{x^2y^2}, \quad 10.\ \frac{\arctan(x^2)\sin y}{x^2+y^2}.$$

Nalezněte maximum a minimum funkce $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ na množině

7. $M_1 = \{x^2+y^2 \le 1\}$, 8. $M_2 = \{|x|+|y| \le 1\}$.

Výsledky a návody:

1. Ano; Uzavřenost: $g(x,y) = x^6 + y^6$ je spojitá a $M = g^{-1}((-\infty, 1])$ je vzor uzavřené množiny. Omezenost: $[x,y] \in M \Rightarrow |x| \le 1$ a $|y| \le 1 \Rightarrow M \subset B(0,2)$.

2. Ne; Je uzavřená, ale $\forall n \in \mathbf{N}$ $[-n,n] \in M \Rightarrow M$ není omezená.

3. Nelze rozšířit; Po ose $x = 0$ limita 0 a po $y = 0$ je ± 1.

4. Lze rozšířit 0; $\Big|\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big| \le |x|$.

5. Nelze rozšířit; Po ose $x=0$ limita 0 a po přimce $y=x$ je $\dfrac{1}{2}$.

6. Lze rozšířit 0; $\dfrac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x^4}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} \le x^2+y^2$.

9. Lze rozšířit 1; $=\exp\big(x^2y^2\log(x^2+y^2)\big)$ a

$x^2y^2|\log(x^2+y^2)| \le (x^2+y^2)|\log(x^2+y^2)| \to 0$, neboť $t^2\log t \to 0$.

10. Lze rozšířit 0; $\Big|\dfrac{\arctan(x^2)\sin y}{x^2+y^2}\Big| \le \Big|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\Big| \le \dfrac{1}{2}|x|$.

7. Minimum 0 je v $[0,0]$ a maximum $\dfrac{3}{2}$ je v $[\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}]$ a $[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]$;

Z $0=\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-y$ a $0=\dfrac{\partial f}{\partial y}=-x+2y$ dostaneme podezřelý bod $[0,0]$.

Hranici parametrizujeme $[\cos t,\sin t]$, $t\in[0,2\pi]$. Derivací $F(t)=f(x,y)=1-\cos t\sin t$ dostaneme čtyři podezřelé body $[\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}]$.

8. Minimum 0 je v $[0,0]$ a maximum 1 je v $[\pm1,0]$ a $[0,\pm1]$;

Z $0=\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-y$ a $0=\dfrac{\partial f}{\partial y}=-x+2y$ dostaneme podezřelý bod $[0,0]$.

Čtyři části hranice parametrizujeme $[t,1-t]$, $[t,-1+t]$, $[-t,1-t]$ a $[-t,-1+t]$.

Podezřelých bodů je osm: $[\pm1,0]$, $[0,\pm1]$ a $[\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}]$.

11. Ano; Uzavřená - standartně. Sporem dokážeme, že $M\subset B(0,10)$.

Nechť $[x,y]\in M\cap(\mathbf{R}^2\setminus B(0,10)) \Rightarrow |x|\ge 5$ nebo $|y|\ge 5$ (jinak $x^2+y^2\le 5^2+5^2<10^2$).

Nechť BÚNO $|x|\ge|y|$ a $|x|\ge 5$, pak $x^4+y^4-4xy \ge |x|^4+0-4|x|^2>0 \Rightarrow [x,y]\notin M$ spor.

12. Ano; Uzavřená - standartně. Od $(x+y+z)^2=25$ odečtěte $2xy+2xz+2yz=16$.

T1. Nechť K_1,K_2 jsou kompaktní množiny v (P,ρ). Musí být $K_1\cap K_2$ a $K_1\cup K_2$ kompaktní?

T2*. Nechť (P,ρ) je metrický prostor a $B(x,r)\subset B(y,R)$. Rozhodněte, zda musí platit $B(x,2r)\subset B(y,2R)$.

5. cvičení

U následujících funkcí nalezněte spojité rozšíření na $\mathbf{R}^2$, spočtěte parciální derivace a totální diferenciál všude, kde existují:

1. x^2y^3, 2. $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, 3. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 4. $\dfrac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 5. $e^{\frac{-1}{x^2+y^2+xy}}$, 6. $xy\dfrac{\sin(x-y)}{x^2-y^2}$.

Pomocí derivace složené funkce spočtěte

7. $\dfrac{\partial z^*}{\partial\varphi}$ pro $z=x^2+y^2$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ a $z^*(r,\varphi)=z(x,y)$.

8. Dokažte, že $\log(x^2+y^2)$ splňuje $f_{xx}+f_{yy}=0$. Dokažte, že pokud f splňuje $f_{xx}+f_{yy}=0$, pak $g(x,y)=f\big(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{y}{x^2+y^2}\big)$ splňuje $g_{xx}+g_{yy}=0$.

$\Big($Používáme zde standartní značení $h_x=\dfrac{\partial h}{\partial x}$, $h_y=\dfrac{\partial h}{\partial y}$, $h_{xx}=\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}$.$\Big)$

Výsledky a návody:

1. $df(x,y)(h_1,h_2)=2xy^3h_1+x^23y^2h_2$.

2. $df(x,y)(h_1,h_2) = \dfrac{2xy(x^2+y^2) - x^2y2x}{(x^2+y^2)^2}h_1 + \dfrac{x^2(x^2+y^2) - x^2y2y}{(x^2+y^2)^2}h_2$ pro $[x,y] \neq [0,0]$

a v $[0,0]$ jsou $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$, ale $df(0,0)$ neexistuje :

$\lim \dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ po osách 0 a po přímce $x = y$ je $2^{-\frac{3}{2}}$.

3. Nelze spojitě dodefinovat do $[0,0]$. Jinde má totální diferenciál.

4. Totální diferenciál má všude, i v $[0,0]$. $|\dfrac{y^3}{x^2+y^2}| \leq |y| \to 0$.

5. Totální diferenciál má všude, i v $[0,0]$. $\dfrac{1}{2}(x^2+y^2) \leq x^2+y^2+xy$ a $\dfrac{e^{-\frac{1}{t}}}{t} \to 0$.

6. Do bodů $[x,x]$ lze spojitě dodefinovat hodnotou $\dfrac{x}{2}$

a do bodů $[x,-x]$ nelze spojitě dodefinovat.

V těchto bodech nemá parciální derivace pro $x \neq 0$. V $[0,0]$ nemá totální diferenciál.

7. $\dfrac{\partial z^*}{\partial \varphi} = z_x x_\varphi + z_y y_\varphi = 2xr(-\sin\varphi) + 2yr\cos\varphi = 0.$

$\dfrac{\partial z^*}{\partial r} = z_x x_r + z_y y_r = 2x\cos\varphi + 2y\sin\varphi = 2r.$

8. O $f(a,b)$ víme $f_{aa} + f_{bb} = 0$. Derivace složené funkce dá

$$g_x = f_a \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) + f_b \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y}{x^2+y^2}\Big) = f_a \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + f_b \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Z derivace složené funkce víme $\dfrac{\partial}{\partial x} f_a = f_{aa}\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + f_{ab}\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$

tedy podle derivace součinu dostaneme

$$g_{xx} = \Big(f_{aa}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + f_{ab}\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\Big)\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + f_a \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\Big) + \dots.$$

Podobně spočteme g_{yy} a po úpravě vyjde $g_{xx} + g_{yy} = COSI \cdot (f_{aa} + f_{bb}) = 0$.

T1. Setrojte funkci $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, která je parciálně spojitá, ale není spojitá. Řekneme, že f je parciálně spojitá, pokud pro každé $x_0 \in \mathbf{R}$ je funkce $g(y) = f(x_0, y)$ spojitá na $\mathbf{R}$ (jakožto funkce jedné proměnné) a pro každé $y_0 \in \mathbf{R}$ je funkce $h(x) = f(x, y_0)$ spojitá na $\mathbf{R}$.

T2. Sestrojte funkci $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, která má v bodě $[0,0]$ derivaci ve všech směrech $D_v f(0,0)$, ale není v bodě $[0,0]$ spojitá.

T3. Sestrojte spojitou funkci $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, která má v bodě $[0,0]$ derivaci ve všech směrech $D_v f(0,0)$, ale neexistuje totální diferenciál $Df([0,0])$.

6. cvičení

Písemka na 60minut hodinu.

Předtím něco z těchto příkladů:

Nalezněte maximum M a minimum m funkce f na množině S:

3. $f(x,y) = x - 2y - 3,\ S = \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x + y \leq 1\}$,

4. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2,\ S = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$, 6. $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)},\ S = \mathbf{R}^2$,

7. $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y},\ S = \Big\{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{y^2} = 1\Big\}$,

8. $f(x,y,z) = (x+y+z)e^{-(x+2y+3z)},\ S = \{x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$.

Výsledky a návody:

3. $M = f([1,0]) = -2,\ m = f([0,1]) = -5$; Uvnitř není extrém.

Kraj má 3 části: $a)$ $x=0$ $f=-2y-3$, $b)$ $y=0$ $f=x-3$, $c)$ $x=1-y$ $f=1-3y-3$.

4. $M=f([\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}])=f([-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}])=3/2,\ m=f([0,0])=0;$

Uvnitř je podezřelý bod $[0,0]$. Kraj parametrizujeme $x=\cos\varphi,\ y=\sin\varphi, \varphi\in[0,2\pi]$.

$f=1-\sin\varphi\cos\psi$. Podezřelých je 5 bodů $[1,0],\ [\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}]$.

6. $M=\dfrac{1}{e}$ pro všechny body, kde $x^2+y^2=1,\ m=f([0,0])=0;$

Zřejmě $f(x,y)=g(x^2+y^2)$, kde $g(t)=te^{-t}$. Vyšetříme tedy průběh funkce g na $[0,\infty)$.

Zjistíme, že $M_g=g(1)$ a $m_g=g(0)$.

7. $M=f([\frac{2}{\sqrt{3}},2\sqrt{3}]),\ m=f([-\frac{2}{\sqrt{3}},-2\sqrt{3}]);$

Vyšetřujeme pomocnou úlohu $f(\tilde{x},\tilde{y})=\tilde{x}+\tilde{y}$, na $\S=\{\tilde{x}^2+3\tilde{y}^2\le 1\}$

a zpět se vrátíme substitucí $\tilde{x}=\dfrac{1}{x}$ a $\tilde{y}=\dfrac{1}{y}$.

Okraj $\S$, tedy elipsu parametrizujeme $x=\cos\varphi,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\varphi$.

8. $\sup=\dfrac{1}{e}=f([1,0,0]),\ \inf=0=f([0,0,0]);$

Je potřeba se omezit na nějaký kompakt, abychom mohli použít větu.

Uvnitř nejsou podezřelé body. Ani na hraničních 'čtvrtrovinách'.

Na hraničních přímkách jsou podezřelé body $[0,0,0],\ [1,0,0],\ [0,\frac{1}{2},0]$ a $[0,0,\frac{1}{3}]$.

7. cvičení

Vyšetřete lokální extrémy funkce:

1. x^2+y^2-2y, 2. $xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$ na $M=\{x>0,y>0\}$, 3. $x^3+y^2+z^2+6xy+2z$,

4. $(1+e^y)\cos x-ye^y$, 5. $x^4+x^3+2y^2+z^2-yz-5y+3z$.

Výsledky a návody:

1. Lokální minimum v $[0,1]$; Snadná rozcvička :-).

2. Lokální minimum v $[5,2]$; Z $y-\frac{50}{x^2}=0=x-\frac{20}{y^2}$ dostaneme $2x=5y$.

Matice $D^2=\begin{pmatrix}\frac{100}{x^3} & 1\\ 1 & \frac{40}{y^3}\end{pmatrix}$ je v $[5,2]$ pozitivně definitní.

3. Lokální minimum v $[6,-18,-1]$ a v $[0,0,-1]$ není nic ;

Matice $D^2=\begin{pmatrix}6x & 6 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ je v $[6,-18,-1]$ pozitivně definitní.

V $[0,0,-1]$ vyšetříme přímku $[x,0,-1]$. Zde $f=x^3-1$ nemá ani max ani min.

4. Lokální maximum v $[2k\pi,0]$ a v $[(2k+1)\pi,-2]$ není nic ;

Matice $D^2=\begin{pmatrix}(1+e^y)(-\cos x) & -e^y\sin x\\ -e^y\sin x & e^y\cos x-e^y(2+y)\end{pmatrix}$

je v $[2k\pi,0]$ negativně definitní a v $[(2k+1)\pi,-2]$ indefinitní.

5. Lokální minimum v $[-\frac{3}{4},1,-1]$ a v $[0,1,-1]$ není nic ;

Na přímce $[x,1,-1]$ je $f=x^4+x^3+f([0,1,-1])$ a tato funkce tam nemá ani max ani min.

T1. Dokažte, že $f(x,y)=(x-y^2)(2x-y^2)$ má v $[0,0]$ lokální minimum vzhledem ke všem přímkám, ale nemá tam minimum.

T2. Sestrojte funkce $f,g\in C^2(\mathbf{R}^2)$ tak, že $D^2f(0,0)$ i $D^2g(0,0)$ jsou pozitivně semidefinitní, f má v $[0,0]$ lokální maximum, ale g nemá v $[0,0]$ lokální maximum.

8. cvičení

Za pomoci věty o implicitních funkcích spočtěte:

1. y_x a y_{xx}, pokud $x^3 + y^3 = 2xy$ v bodě $[1, 1]$.

2. x_v, y_v a z_v, pokud $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - 2xy^2$ a $z = \log(y^2 - x^2)$ v bodě $u = 5$, $v = -7$, $x(5, -7) = 1$ a $y(5, -7) = 2$.

3. Dokažte, že existují funkce $z(x, y)$ a $t(x, y)$ splňující na okolí $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$, $t = 0$ vztahy $x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 = 0$ a $x + y + z - t - 2 = 0$.

Spočtěte druhé derivace $z(x, y)$, $t(x, y)$ a dále $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, kde $w = z^2 e^t$.

4. z_{xy} v bodě $u = 2$, $v = 1$ jestliže $x = u + v^2$, $y = u^2 - v^3$ a $z = 2uv$.

Výsledky a návody:

1. $y'(1) = -1$ a $y''(1) = -16$; Derivováním rovnice dostaneme $3x^2+3y^2y' = 2y+2xy'$.

Odtud po dosazení $x = 1$ a $y = 1$ dostaneme $y' = -1$.

Opětovným zderivováním $6x + 6yy'y' + 3y^2y'' = 2y' + 2y' + 2xy''$.

2. $x_v = -\dfrac{1}{2}$, $y_v = \dfrac{1}{4}$ a $z_v = \dfrac{2}{3}$; Derivací rovnic $\dfrac{\partial}{\partial v}$ dostaneme $0 = 2xx_v+2yy_v$ a $0 = 2xx_v-2x_vy^2-2x2yy_v-1$. Dosadíme $x = 1, y = 2$ a vyřešíme.

Podle řetízkového pravidla $z_v = z_x x_v + z_y y_v = \dfrac{-2x}{y^2 - x^2}\dfrac{-1}{2} + \dfrac{2y}{y^2 - x^2}\dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{3}$.

3. $z_x = 1$, $z_y = -1$, $t_x = 2$, $t_y = 0$, $t_{xx} = z_{xx} = \dfrac{1}{2} = z_{yy} = t_{yy}$, $t_{xy} = z_{xy} = \dfrac{1}{2}$ a $w_x = 12$;

Derivací rovnic dostaneme $2x - zz_x - 3t^2t_x = 0$ a $1 + z_x - t_x = 0$.

Tedy $z_x = \dfrac{2x - 3t^2}{z + 3t^2}$ a derivováním $z_{xx} = \dfrac{(2 - 6tt_x)(z + 3t^2) - (2x - 3t^2)(z_x + 6tt_x)}{(z + 3t^2)^2}$.

Dále $w_x = 2zz_xe^t + z^2t_xe^t = 4 + 8 = 12$.

4. $z_{xy} = \dfrac{26}{121}$; Z prvních dvou rovnic můžeme imlicitně určit pro $u(x, y), v(x, y)$

$v_x = \dfrac{4}{11}$, $u_x = \dfrac{3}{11}$, $v_y = \dfrac{-1}{11}$, $u_y = \dfrac{2}{11}$ atd. Z poslední rovnice dostaneme

$z_x = 2u_xv + 2uv_x$, a tedy $z_{xy} = 2u_{xy}v + 2u_xv_y + 2u_yv_x + 2uv_{xy}$.

T1. Je podmínka $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$ ve větě o implicitní funkce nutná? Dokážete sestrojit funkci, která splňuje všechny předpoklady (kromě tohoto) a $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ a přesto platí závěr?

T2. Sestrojte funkce $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, tak, že f má parciální derivace ve všech bodech, g má spojité parciální derivace, ale $f(g(x))$ nemá parciální derivaci v $[0, 0]$.

9. cvičení

Nalezněte maximum M a minimum m funkce f na množině S:

1. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $S = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\}$,

2. $f(x, y, z) = xyz$, $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0\}$,

3. $f(x, y, z) = 10z + x - y$, $S = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x + y \geq 0\}$,

4. Pomocí vázaných extrémů dokažte $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.

Výsledky a návody:

1. $M = f([0, 0, \pm 10]) = 300$, $m = f([0, 0, 0]) = 0$; $2x-2\lambda x = 0 \Leftrightarrow (x = 0)$ nebo $(\lambda = 1)$

Podobně pro $4y - 2\lambda y = 0$ a $6z - 2\lambda z = 0$ a rozdiskutujeme všechny možnosti.

$$2.\ M = f([\tfrac{1}{\sqrt6}, \tfrac{1}{\sqrt6}, \tfrac{-2}{\sqrt6}]) = f([\tfrac{1}{\sqrt6}, \tfrac{-2}{\sqrt6}, \tfrac{1}{\sqrt6}]) = f([\tfrac{-2}{\sqrt6}, \tfrac{1}{\sqrt6}, \tfrac{1}{\sqrt6}]),$$
$$m = f([\tfrac{-1}{\sqrt6}, \tfrac{-1}{\sqrt6}, \tfrac{2}{\sqrt6}]) = f([\tfrac{-1}{\sqrt6}, \tfrac{2}{\sqrt6}, \tfrac{-1}{\sqrt6}]) = f([\tfrac{2}{\sqrt6}, \tfrac{-1}{\sqrt6}, \tfrac{-1}{\sqrt6}]);$$

$L = xyz + \lambda_1(x^2+y^2+z^2) + \lambda_2(x+y+z)$. Odečteme od sebe rovnice

$$yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 = xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2$$

a rozdiskutujeme na případy $(x=y)$ nebo $(y=z)$ nebo $(x=z)$.

Po dosazení do $x^2+y^2+z^2=1$ a $x+y+z=0$ snadno dopočteme.

$$3.\ M = f([\tfrac{1}{\sqrt{102}}, \tfrac{-1}{\sqrt{102}}, \tfrac{10}{\sqrt{102}}]) = \sqrt{102},\ \ m = f([\tfrac{-1}{\sqrt{102}}, \tfrac{1}{\sqrt{102}}, \tfrac{-10}{\sqrt{102}}]) = -\sqrt{102};$$

a) Uvnitř koule není extrém. *b*) Na rovině $x+y=0$ také ne.

c) Vyšetříme extrémy na celé sféře $x^2+y^2+z^2=1$.

Z $1+2\lambda x = 0 = -1+2\lambda y = 10+2\lambda z$ snadno určíme $x=-y$ a $z=10x$.

Tedy lehce dostaneme podezřelé body $[\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{-1}{\sqrt{102}}, \frac{10}{\sqrt{102}}]$ a $[\frac{-1}{\sqrt{102}}, \frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{-10}{\sqrt{102}}]$.

Oba tyto body leží v polorovině $x+y \geq 0$, a tedy jsou pro nás podezřelé.

d) Kružnici $K = \{x+y=0,\ x^2+y^2+z^2=1\}$ nemusíme vyšetřovat,

neboť max na ní $\leq$ max na sféře a to už známe. Analogicky pro min.

4. Na množině $S = \{x_i \geq 0,\ x_1+\ldots+x_n = 1\}$ hledejte extrém funkce $f = x_1 \cdots x_n$.

Na kraji je $f=0$, a tedy tam neni max. Z rovnic snadno dostaneme $x_1 = \ldots = x_n$.

T1. Nechť $f \in C([0,1])$ a mějme zobrazení $I : C([0,1]) \to \mathbf{R}$ definované jako $I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$. Dokažte, že toto zobrazení je spojité.

T2*. Ukažte, že $\overline{B(0,1)}$ v $C([0,1])$ je uzavřená, omezená, ale není kompaktní.

10. cvičení

Nalezněte maximum M a minimum m (popřípadě supremum s a infimum i) funkce f na množině S:

$$1.\ f(x,y) = -x^4 - y^4,\ S = \{x^2+2y^2 > 1\},$$
$$2.\ f(x,y,z) = xy^2z^3,\ S = \{x+2y+3z=6,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z \geq 0\},$$
$$3.\ f(x,y,z) = z^6 + x^3 + y^2 - 6x - 2y,\ S = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3 : x > z^2\},$$
$$4.\ f(x,y) = y,\ S = \{(x^2+y^2)^2 = 4xy\},$$
$$5.\ \text{Pomocí vázaných extrémů dokažte } \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \Big(\sum_{i=1}^n x_i^p\Big)^{\frac1p}\Big(\sum_{i=1}^n y_i^q\Big)^{\frac1q},$$
$$\text{kde } \frac1p + \frac1q = 1 \text{ a } x_i \geq 0,\ y_i \geq 0.$$

Výsledky a návody:

$$1.\ s = f([\pm\tfrac{1}{\sqrt5}, \pm\tfrac{\sqrt2}{\sqrt5}]) = -\tfrac15,\ i = -\infty;$$

Z $-4x^3+2\lambda x = 0 = -4y^3+4\lambda y$ lehce dostaneme $x=0$ nebo $y=0$ nebo $y^2 = 2x^2$.

2. $M = f([1,1,1]) = 1,\ m = 0$ na $S \cap \{x=0$ nebo $y=0$ nebo $z=0\}$;

Vynásobíme $\frac{\partial L}{\partial x} \cdot x,\ \frac{\partial L}{\partial y} \cdot y,\ \frac{\partial L}{\partial z} \cdot z$ a dostaneme $xy^2z^3 = -\lambda x = -\lambda y = -\lambda z$.

3. $s = \infty,\ m = f([\sqrt2, 1, 0]) = -1 - 4\sqrt2$; Zřejmě $s = \infty$.

$f([1,0,0]) = -5$ a pro $[x,y,z] \in S \cap (\mathbf{R}^3 \setminus (-3,3)^3)$ je

$f([x,y,z]) = z^6 + x(x^2-6) + (y-1)^2 - 1 \geq -1$. Tedy zde není infimum.

Omezme se na kompakt $S = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3 : x \geq z^2\} \cap [-3,3]^3$.

Uvnitř je jediný podezřelý bod $[\sqrt2, 1, 0]$.

Na části hranice $\{x > z^2\} \cap \partial[-3,3]^3$ máme $f \geq -1$ a není tam extrém.

Na $[-3,3]^3 \cap \{x = z^2\}$ použijeme Lagrange. Buď $z=0$ a máme bod $[0,1,0]$, nebo do $-3z^4 = \lambda = 3x^2 - 6$ dosadíme $x = z^2$ a dostaneme body $[1, 1, \pm 1]$.

4. $M = f([(\frac{3}{16})^{\frac{1}{4}}, 4(\frac{3}{16})^{\frac{3}{4}}]) = 4(\frac{3}{16})^{\frac{3}{4}},\ m = f([-(\frac{3}{16})^{\frac{1}{4}}, -4(\frac{3}{16})^{\frac{3}{4}}]) = -4(\frac{3}{16})^{\frac{3}{4}}$;

Z $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ plyne $x^2 + y^2 = \frac{y}{x}$. Dosadíme do $(x^2+y^2)^2 = 4xy$ a dostaneme $y = 4x^3$.

Po dosazení $y = 4x^3$ do $x^2 + y^2 = \frac{y}{x}$ snadno dopočteme x.

T1*. Definujme si metrický prostor Riemannovsky integrovatelných funkcí $R([0,1])$ a na něm metriku $\rho(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$. Ukažte, že tento prostor není úplný.

T2*. Nalezněte F_n uzavřené (ve vhodném metrickém prostoru (P,ρ)), $F_{n+1} \subset F_n$ pro $n \in \mathbf{N}$ tak, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ pro a) $\operatorname{diam} F_n = \infty$ b) $\operatorname{diam}(F_n) \leq 1$ c) $\operatorname{diam}(F_n) \leq 1$ na prostoru spojitých funkcí $C([0,1])$.

11. cvičení

Písemka na 60 minut.

Nejprve na tabuli předvést jeden příklad s neomezenou S.

12. cvičení

Nalezněte maximum M a minimum m funkce f na množině S:

1. $f(x,y) = x + y,\ S = \{x^3 + y^3 - 2xy = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$,

2. $f(x,y) = x^4 + y^4 + 16z^4,\ S = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3 : xyz > 1\}$,

3. $f(x,y,z) = xyz,\ S = \{x + y + z = 5,\ xy + yz + zx = 8\}$,

4. $f(x,y) = xy,\ S = \{(x^2+y^2)^2 = Kxy\},\ K > 0$.

Výsledky a návody:

1. $M = f([1,1]) = 2,\ m = f([0,0]) = 0$;

Odečtením $1+\lambda(3x^2-2y) = 0$ od $1+\lambda(3y^2-2x) = 0$ dostaneme $(x-y)(3x+3y+2) = 0$.

Z $x = y$ a $x^3 + y^3 = 2xy$ dostaneme podezřelý bod $[1,1]$.

Vyšetřením krajů $S \cap \{x = 0\}$ a $S \cap \{y = 0\}$ nalezneme minimum v $[0,0]$.

2. $M = \infty,\ m = f([\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt[3]{2}}{2}]) = f([-\sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt[3]{2}}{2}]) = 6$;

Supremum je jasné. Omezíme se na $\tilde{S} = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 100,\ xyz = 1\}$.

Vynásobíme první rovnici x druhou y a třetí z.

Po odečtení dostaneme $x^4 = y^4 = (2z)^4$ což má 4 řešení pro $xyz = 1$.

3. $M = f([\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}]) = f([\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}]) = f([\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}]) = \dfrac{112}{27}$,

$m = f([2,2,1]) = f([2,1,2]) = f([1,2,2]) = 4$;

Omezenost množiny: viz cvičení 2, příklad číslo 5.

Po odečtení rovnic pro derivace lehce zjistíme, že $(x = y)$ nebo $(y = z)$ nebo $(x = z)$.

Po dosazení do $x + y + z = 5$ a $xy + yz + zx = 8$ dopočteme.

4. $M = f([\frac{\sqrt{K}}{2}, \frac{\sqrt{K}}{2}]) = \frac{K}{4},\ m = f([0,0]) = 0$;

Omezenost je standartní a (netriviální) a nezapomene ověřit i maximální hodnost.

První vazbovou rovnici vynásobím x a druhou y a odečtu.

Snadno dostaneme buď $x = y$ nebo $x = 0$ nebo $y = 0$.

T1. Dokažte, že konečné sjednocení řídkých množin je řídká množina

T2. Nechť $A \subset C([0,1])$ je množina všech 1-lipschitzovských funkcí. Rozhodněte, jestli je A uzavřená a řídká.

T3*. Ukažte, že existují $A, B \subset [0,1]$ tak, že A je první kategorie a B má Lebesgueovu míru 0.