

## Požadavky znalostí ke státní bakalářské zkoušce

### Matematická analýza

#### 1. Posloupnosti reálných čísel, limity.

Limita posloupnosti (vlastní a nevlastní), Bolzanova-Cauchyova podmínka. Věty o limitách. Vybrané posloupnosti.

#### 2. Elementární funkce a jejich zavedení.

Goniometrické funkce a cyklometrické funkce. Exponenciální funkce, přirozený a obecný logaritmus, obecná mocnina, odmocnina. Vlastnosti těchto funkcí a jejich vzájemné vztahy.

#### 3. Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné. Vlastnosti spojitých funkcí na uzavřeném intervalu. Průběh funkce, užití vyšších derivací.

Limita funkce, aritmetika limit, limita složené funkce, limitní přechod v nerovnosti, limita monotónní funkce. Spojitost funkce v bodě a na intervalu, Heineova definice spojitosti, vlastnosti spojitých funkcí na uzavřeném intervalu. Derivace funkce, početní pravidla pro derivování, derivace inverzní funkce. Věty o střední hodnotě: Rolleova, Lagrangeova a Cauchyova. L'Hospitalovo pravidlo. Vztah derivace a monotonie funkce, nutné a postačující podmínky pro extrém. Taylorův polynom, Taylorova věta. Konvexnost a konkávnost a jejich souvislost s druhou derivací funkce. Asymptoty.

#### 4. Primitivní funkce, Newtonův integrál.

Základní primitivní funkce. Integrace per partes. První a druhá věta o substituci. Integrace racionálních funkcí, základní typy substitucí.

#### 5. Riemannův integrál.

Zavedení Riemannova integrálu, geometrická interpretace. Riemannův integrál jako funkce horní meze. Newtonova-Leibnizova formule. Existenční věty pro Riemannův integrál. Nevlastní integrál. Délka křivky zadané parametricky, objem rotačního tělesa a povrch jeho pláště, obsah plochy zadané parametricky.

#### 6. Nekonečné číselné řady, mocninné řady.

Součet řady, konvergentní a divergentní řady, Bolzanova-Cauchyova podmínka, nutná podmínka konvergence. Řady s nezápornými členy a kritéria jejich konvergence: srovnávací, odmocninové, podílové a integrální kritérium, limitní tvary kritérií. Řady se střídavými znaménky, Leibnizovo kritérium. Absolutně a neabsolutně konvergentní řady. Součin řad. Mocninná řada a její konvergence, poloměr konvergence. Derivace a integrace mocninné řady člen po členu.

#### 7. Diferenciální rovnice.

Věty o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy. Metody řešení diferenciálních rovnic: rovnice se separovanými proměnnými, homogenní rovnice. Lineární rovnice 1. řádu a jejich soustavy, variace konstant, rovnice s konstantními koeficienty, speciální tvary pravé strany.

#### 8. Funkce více proměnných.

Limita a spojitost. Parciální derivace, derivace ve směru, totální diferenciál, gradient. Derivace složené funkce. Věta o inverzní funkci. Věta o implicitní funkci. Lokální extrémy, vázané extrémy, metoda Lagrangeových multiplikátorů.

### Lineární algebra a algebra

#### 1. Relace, zobrazení a jejich základní vlastnosti.

Relace a jejich vlastnosti. Ekvivalence, uspořádání, úplné uspořádání, příklady. Rozklad množiny podle ekvivalence. Zobrazení (injektivní, surjektivní a bijektivní), skládání zobrazení. Jádro a obraz zobrazení ( $\text{Ker } f$ ,  $\text{Im } f$ ), rozklad zobrazení na surjekci, bijekci a injekci.

#### 2. Vektorový prostor, báze, dimenze, lineární zobrazení. Vektorový prostor se skalárním součinem.

Příklady vektorových prostorů, lineární závislost a nezávislost, báze a dimenze konečně generovaného vektorového prostoru, věta o dimenzích spojení a průniku. Vlastnosti homomorfismu, věta o hodnotě a defektu. Skalární součin na reálném vektorovém prostoru, ortonormální báze, ortogonální doplněk podprostoru. Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces.

### 3. Matice a jejich vlastnosti, užití k řešení soustav lineárních rovnic. Formy.

Hodnost matice, regulární a singulární matice, inverzní matice, matice homomorfismu.

Frobeniova věta o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic. Věta o dimenzi vektorového prostoru všech řešení homogenní soustavy. Užití matic k řešení soustav lineárních rovnic, Gaussova eliminační metoda.

Vlastní čísla a vlastní vektory, podobnost matic. Charakteristický a minimální polynom.

Lineární formy, duální báze. Bilineární a kvadratické formy, jejich matice, polární a normální báze, Sylvestrův zákon o setrvačnosti, signatura.

### 4. Determinanty a jejich vlastnosti, Cramerovo pravidlo.

Definice determinantu, Sarrusovo pravidlo, věta o rozvoji determinantu, charakterizace regulárních matic pomocí determinantů. Výpočet inverzní matice pomocí determinantů. Věta o násobení determinantů. Řešení soustav lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla.

### 5. Přirozená a celá čísla, dělitelnost.

Přirozená čísla, Peanovy axiomy, matematická indukce, dobré uspořádání. Konstrukce oboru integrity celých čísel. Dělitelnost, největší společný dělitel, nejmenší společný násobek. Eukleidův algoritmus a Bézoutova věta, Eukleidovo lémma, Základní věta aritmetiky. Numerační soustavy o různých základech.

Prvočísla, Eratosthenovo síto, mohutnost množiny všech prvočísel. Mersennova čísla, dokonalá čísla, věta Eukleidova a Eulerova. Fermatova čísla a prvočísla. Přirozená čísla jako svaz.

Kongruence modulo  $n$ , odvození kritérií dělitelnosti. Malá Fermatova věta.

### 6. Čísla racionální, reálná a komplexní.

Konstrukce pole racionálních čísel, podílové pole. Reálná čísla (Dedekindovy řezy, desetinné rozvoje, Cauchyovské posloupnosti, axiomatický popis  $\mathbb{R}$ ), iracionalita.

Řetězové zlomky, konvergence, aproximace reálných čísel racionálními. Algebraická a transcendentní čísla.

Pole komplexních čísel, zavedení, vlastnosti. Algebraický a goniometrický tvar, operace a jejich geometrické znázornění, důkazy některých goniometrických vzorců. Mohutnosti číselných oborů.

### 7. Grupy a jejich homomorfismy.

Binární operace na množině. Pojem grupy, grupa permutací, grupy symetrií pravidelných  $n$ -úhelníků, další příklady. Podgrupy a jejich vlastnosti. Svaz podgrup. Cyklické grupy a jejich vlastnosti. Lagrangeova věta. Homomorfismy grup, příklady. Jádro a obraz homomorfismu a jejich vlastnosti. Faktorizace grupy podle normální podgrupy. Příklady.

### 8. Okruhy, obory integrity, tělesa, pole a jejich základní vlastnosti.

Oboustranný ideál okruhu, faktorizace okruhu podle oboustranného ideálu. Příklady. Homomorfismy okruhů. Obor integrity, těleso, pole, příklady.

### 9. Základní pojmy dělitelnosti v komutativním oboru integrity.

Relace dělitelnosti a asociovanosti v oboru integrity. Příklady eukleidovských oborů integrity a příklady na užití Eukleidova algoritmu. Ireducibilní prvek, prvočinitel.

### 10. Rovnice.

Základní věta algebry. Rovnice 1., 2. a 3. stupně, Cardanovy vzorce, casus irreducibilis. Vietovy vzorce. Racionální a celočíselné kořeny algebraických rovnic s celočíselnými koeficienty, algebraická a transcendentní čísla. Reciproká rovnice. Lineární diofantické rovnice.

### 11. Posloupnosti, průměry.

Aritmetická a geometrická posloupnost. Aritmetické posloupnosti vyšších řádů. Geometrická řada a harmonická řada. Aritmetický, geometrický a harmonický průměr, jejich vztah a geometrické znázornění.

## Geometrie

### Syntetická geometrie

#### 1. Planimetrie (věty i s důkazy).

Základní věty geometrie trojúhelníku: Thalétova, Eukleidovy, Pýthagorova a její zobecnění (např. Hippokratovy měsíčky), sinová, kosinová, součet vnitřních úhlů. Těžiště a ortocentrum, **Feuerbachova kružnice (bez důkazu)**, Eulerova přímka, střední příčky, osy stran a osy úhlů, kružnice opsaná, vepsaná a přípsaná. Konstrukce trojúhelníku (sss, sus, usu, Ssu, zadání pomocí výšek a těžnic).

Klasifikace a vlastnosti čtyřúhelníků, konstrukce; vlastnosti tečnových a tětívových čtyřúhelníků (Ptolemaiova věta, součty vnitřních úhlů).

Kružnice a její vlastnosti (tečny, tětivy, obvodové a středové úhly, úsekový úhel, mocnost bodu ke kružnici), konstrukce.

Obvody a obsahy rovinných útvarů, např. obsah trojúhelníku, Hérónův vzorec, obsah čtyřúhelníku a  $n$ -úhelníku. Obsah a obvod kruhu a jeho částí.

Shodnosti, podobnosti, stejnolehlost. Kruhová inverze.

## **2. Stereometrie (věty i s důkazy).**

Základní stereometrické věty a jejich důkazy (rovnoběžnost přímky a roviny, rovnoběžnost dvou rovin, vzájemná poloha tří rovin, kolmost přímky a roviny, kolmost dvou rovin). Řezy mnohostěňů.

Vzdálenosti a odchylky bodů, přímek, rovin.

Mnohostěny, Eulerova věta. Pravidelné mnohostěny (Platónská tělesa, jejich počet a vlastnosti).

Objem a povrch těles a jejich částí, Cavalieriho princip.

Geometrická zobrazení v prostoru (shodnosti, podobnosti).

## **3. Zobrazovací metody.**

Princip rovnoběžného a středového promítání. Řešení stereometrických úloh ve volném rovnoběžném promítání. Osová afinita, afinní obraz kružnice (užití osové afinity při konstrukci řezů hranolů a válců). Základy Mongeova promítání. Základy kosoúhlého promítání, základy lineární perspektivy.

## **Analytická geometrie**

### **1. Afinní prostor.**

Afinní prostor a jeho zaměření. Lineární kombinace bodů. Lineární soustava souřadnic. Podprostor a jeho parametrické vyjádření. Obecná rovnice nadroviny, podprostor jako průnik nadrovin, obecné rovnice podprostoru. Vzájemná poloha podprostorů. Orientace afinního prostoru.

### **2. Eukleidovský prostor.**

Eukleidovský prostor. Vnější součin, vektorový součin a jejich základní vlastnosti. Kartézská soustava souřadnic. Kolmost podprostorů. Odchylka dvou přímek, dvou nadrovin, přímky a nadroviny, odchylka přímky a podprostoru. Vzdálenost bodu od podprostoru, vzdálenost podprostorů; osa dvou mimoběžných podprostorů. Příklady v  $E^2$  a  $E^3$ .

### **3. Množiny bodů daných vlastností, kuželosečky.**

Apollóniova kružnice.

Kuželosečky jako řezy kuželové plochy, elipsa jako řez válcové plochy.

Definice, vlastnosti a klasifikace kuželoseček. Kanonické rovnice kuželoseček a jejich transformace.

Vzájemná poloha přímky a kuželosečky.

### **4. Grupy geometrických zobrazení.**

Dělicí poměr, afinní zobrazení, asociovaný homomorfismus. Afinity (základní afinity, homothetie), samodružné body a směry, příklady v  $A^2$  a  $A^3$  včetně analytického vyjádření. Projekce.

Shodnosti, podobnosti, samodružné body a směry, příklady v  $E^2$  a  $E^3$  včetně analytického vyjádření, klasifikace v  $E^2$ .

Stereografická projekce, analytické vyjádření a vlastnosti kruhové inverze.

Grupy geometrických transformací.

## Požadavky znalostí ke státní závěrečné zkoušce z matematiky a didaktiky matematiky

### 1. Matematická analýza.

Základy teorie míry, Lebesgueova míra, měřitelné funkce. Lebesgueův integrál funkcí dvou a více proměnných, Fubiniho věta, věta o substituci, příklady substitucí (polární souřadnice, sférické, válcové souřadnice). Aplikace vícerozměrných integrálů (objemy, obsahy ploch zadaných parametricky, těžiště). Záměna limity a integrálu (věta Leviho a Lebesgueova).

Fourierovy řady: ortonormální systém funkcí, Fourierovy koeficienty, Parsevalova rovnost, Besselova nerovnost; bodová a stejnoměrná konvergence.

Metrické prostory, normované lineární prostory (otevřené a uzavřené množiny, limita a spojitost, úplnost), Banachova věta o pevném bodě a její aplikace.

### 2. Algebra a lineární algebra.

Lineární formy, duální prostor, duální báze. Bilineární a kvadratické formy a jejich matice, polární báze, normální báze, Sylvestrův zákon o setrvačnosti, signatura.

Prostor se skalárním součinem, Cauchyova-Schwarzova nerovnost, trojúhelníková nerovnost, Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces, ortogonální projekce, Fourierovy koeficienty, ortogonální zobrazení, ortogonální matice.

Polynomy, dělitelnost, kořenové vlastnosti, derivace polynomu.

Grupy, okruhy, obory integrity, tělesa: základní výsledky a příklady. Homomorfismy grup.

Hlavní výsledky Galoisovy teorie, řešení algebraických rovnic z hlediska teoretické algebry, konstruovatelnost pravítkem a kružítkem.

### 3. Geometrie.

Projektivní prostor, definice a základní vlastnosti, homogenní souřadnice, projektivní rozšíření afinní roviny. Reálná a komplexní projektivní přímka, grupa Möbiiovských transformací. Základní typy kvadrik a jejich vlastnosti, afinní a eukleidovská klasifikace regulárních a singulárních kuželoseček, afinní klasifikace regulárních kvadrik. Neeukleidovská geometrie, modely hyperbolické geometrie, základy axiomatického vybudování geometrie, Kleinův erlangenský program.

### 4. Diferenciální geometrie.

Parametrické vyjádření křivky, příklady. Délka křivky, parametrizace obloukem. Frenetův repér a Frenetovy vzorce v rovině a v prostoru, křivost a torze.

Parametrické vyjádření plochy, příklady. Tečná rovina, normála. První a druhá základní forma plochy a jejich užití. Střední a Gaussova křivost. Zobrazení mezi plochami (izometrie, konformní zobrazení).

### 5. Logika a teorie množin.

Výrokový a predikátový počet. Axiomatická teorie. Konečné množiny; spočetné a nespočetné množiny. Dobré uspořádání. Kardinální a ordinální čísla. Axiom výběru a jeho ekvivalenty. Peanova aritmetika a model přirozených čísel v teorii množin; čísla celá, racionální, reálná. Mohutnosti oborů přirozených, celých, racionálních a reálných čísel.

### 6. Kombinatorika, pravděpodobnost a matematická statistika.

Princip inkluze a exkluze, permutace bez pevných bodů. Řešení rekurentních rovnic, generující funkce. Fibonacciho čísla. Pravděpodobnostní prostor, různé definice pravděpodobnosti. Podmíněná pravděpodobnost a nezávislost náhodných jevů. Náhodné veličiny – základní charakteristiky, nezávislost. Diskrétní a spojitá rozdělení náhodných veličin. Náhodné vektory. Zákon velkých čísel, centrální limitní věta. Popisná statistika. Korelace, regresní přímka. Odhady parametrů a testy hypotéz. Lineární model a jeho speciální případy, lineární regrese.

### 7. Didaktika matematiky.

Argumentace a ověřování ve školské matematice (induktivní a deduktivní metody, výroky, důkazy a jejich typy). Vytváření představ, pojmů a jejich vlastností, klasifikace pojmů (číslo, číselné obory, funkce a posloupnosti, geometrická zobrazení). Rozvíjení geometrické představivosti v rovině a v prostoru (vzájemné polohy a vlastnosti geometrických útvarů, konstrukční úlohy). Metody řešení úloh v algebře (rovnice, nerovnice a jejich soustavy) a analytické geometrii (rovnice přímk a rovin, vzdálenosti a odchylky). Aplikace matematiky v praxi (finanční matematika, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika).