

GEOMETRIE II

CO JE DOBRÉ ZNÁT KE ZKOUŠCE

Kuželosečky

Rovnice kuželoseček

Kuželosečky jako množina bodů X v rovině, planimetrické definice kuželoseček.

Jednotná charakterizace kuželoseček: $|XF| : |Xp| = k$; rovnice kuželoseček v polárních souřadnicích.

Samostatné odvození rovnice elipsy v polárních souřadnicích na základě planimetrické definice a kosinové věty.

Parametrické vyjádření kružnice, elipsy, paraboly, hyperboly. Hyperbolické funkce.

Quételetova–Dandelinova věta

Kuželosečky jako průnik roviny a kuželové plochy, Quételetova–Dandelinova věta pro elipsu. Odvození charakteristické vlastnosti z planimetrické definice elipsy. Přístupy k definici kuželoseček v SŠ učebnicích.

Elipsa jako průnik roviny a válcové plochy.

Konstrukce kuželoseček

Zahradnická konstrukce elipsy. Bodové konstrukce elipsy: proužková součtová (rozdílová), trojúhelníková, bodová konstrukce dle planimetrické definice. Princip elipsografu.

Bodová konstrukce paraboly dle planimetrické definice.

Bodová konstrukce hyperboly dle planimetrické definice.

Tečny, asymptoty, ohniska

definice a rovnice; tečna, ohniskové vlastnosti, věty o tečnách a asymptotách.

Homogenní souřadnice

Zavedení homogenních souřadnic.

Transformace kuželoseček

Matice kvadratické formy, matice kuželosečky; translace a rotace; singulární a regulární kuželosečky, klasifikace.

Převedení rovnice kuželosečky na kanonický tvar pomocí posunutí a otočení.

Metoda invariantů.

Klasifikace kuželoseček

Klasifikace kuželoseček, kuželosečky regulární a singulární, jejich rovnice a matice.

Geometrická zobrazení

I. Afinní zobrazení

Dělicí poměr

Definice, vyjádření pomocí souřadnic tří bodů na přímce. Vlastnosti symbolu $(A, B; C)$, hodnota při záměně bodů.

Afinní zobrazení

Motivační úvahy v $\mathbb{A}_2$: zobrazení reprezentovaná maticí, příklady; zobrazení zachovávající dělicí poměr.

Definice afinního zobrazení. Existence asociovaného zobrazení $\bar{f}: V_n \rightarrow V_n$, ověření vlastností homomorfismu, definice asociovaného homomorfismu, alternativní definice afinního zobrazení pomocí asociovaného homomorfismu. Určenost asociovaného homomorfismu afinním zobrazením a naopak, otázka jednoznačnosti.

Zobrazení rovnoběžných přímek afinním zobrazením. Souvislost injektivnosti / surjektivnosti asociovaného homomorfismu a afinního zobrazení. Určenost afinního zobrazení pomocí obrazů LNZ bodů.

Analytické vyjádření afinního zobrazení

Odvození analytického vyjádření afinního zobrazení pomocí matice asociovaného homomorfismu.

Restrikce a skládání afinních zobrazení, grupa afinit

Restrikce afinního zobrazení je opět afinní. Složení dvou afinních zobrazení je opět afinní, inverzní zobrazení k afinnímu zobrazení je opět afinní. Afinita (afinní transformace afinního prostoru), grupa afinit (afinní grupa afinního prostoru). Matice složení afinit a matice inverzní afinity.

Samodružné body a směry af. zobrazení

Samodružné body geometrických zobrazení. Hledání samodružných bodů afinního zobrazení řešením soustavy, existence jejího řešení (pomocí Frobeniovy věty), množina všech samodružných bodů afinního zobrazení tvoří afinní podprostor.

Směr afinního prostoru, samodružný směr. Hledání samodružných směrů, vlastní čísla a vlastní vektory. Prostota afinního zobrazení a nenulovost vlastních čísel asociovaného homomorfismu.

Posunutí, stejnolehlost

Afinity, pro něž je každý směr samodružný a jejich asociovaný homomorfismus, existence a jednoznačnost vlastního čísla λ , $\lambda = 1$ (translace), $\lambda \neq 1$ (stejnolehlost).

Skládání translací, grupa všech translací daného afinního prostoru.

Skládání stejnolehlostí s týmž středem, grupa stejnolehlostí s týmž středem.

Skládání stejnolehlostí s různými středy, stejnolehlosti a translace; grupa homothetií.

Vztahy mezi grupami transformací afinního prostoru:

$$\text{grupa translací} \subset \text{grupa homothetií} \subset \text{grupa afinit}.$$

Základní afinity a projekce

Afinní zobrazení, jejichž množina samodružných bodů je nadrovinou ϱ , kompletní klasifikace.

Obraz bodu $B \notin \varrho$ leží v ϱ (projekce ve směru $\text{Ker } \bar{f} = [f(B) - B]$).

Obraz bodu $B \notin \varrho$ neleží v ϱ :

- základní afinita s charakteristikou, charakteristika základní afinity $k = (X, f(X); X_0)$, kde $X_0 = X \cap f(X)$,

- élace (základní afinita bez charakteristiky).

Involuce, základní afinita je involutorní $\iff$ není élací a $k = -1$.

Každou afinitu afinního prostoru $\mathbb{A}_n$ lze složit z nejvýše $n + 1$ základních afinit.

Analytické vyjádření zobrazení s nadrovinou samodružných bodů ϱ : $C^T X + c = 0$, maticový zápis $f(X) = X + (C^T X + c) \cdot L$. Podmínky, kdy je zobrazení s nadrovinou samodružných bodů elací ($C^T L = 0$), projekcí ($C^T L + 1 = 0$), výpočet charakteristiky základní afinity a podmínka existence ($k = \frac{1}{C^T L + 1}$, přičemž $C^T L \neq -1$ a $C^T L \neq 0$), involucí ($C^T L + 2 = 0$).

Kompletní klasifikace afinit v rovině (uvědomění si různých kombinací samodružných bodů a směrů).

Modul afinity, ekviafinity

Modul afinity modul $f := \det A_f$ definovaný pomocí determinantu matice asociovaného homomorfismu. Ekviafinity, definice, geometrická interpretace.

II. Zobrazení v eukleidovském prostoru

Shodná zobrazení

Definice shodného zobrazení (izometrie). Shodné zobrazení je prosté a afinní. $\bar{f}$ zachovává normu, $\bar{f}$ zachovává skalární součin (obojí jsou nutné a postačující podmínky izometričnosti afinního zobrazení). Určení izometrie pomocí obrazů $n + 1$ LNZ bodů.

Analytické vyjádření shodného zobrazení

Odvození v případě standardního i obecného skalárního součinu.

Grupa shodnosti

Shodnost, definice, všechny shodnosti daného eukleidovského prostoru s operací skládání zobrazení tvoří grupu. Shodnost je ekviafinitou. Vlastní čísla λ shodností musí splňovat $|\lambda| = 1$, tj. mohou být rovna pouze 1 a/nebo -1 .

Souměrnost podle nadroviny

Souměrnost podle nadroviny, definice, určenost (pomocí nadroviny samodružných bodů ϱ , nebo jedním bodem neležícím v ϱ a jeho obrazem). Každou shodnost lze složit z nejvýše $n + 1$ souměrností podle nadrovin.

Analytické vyjádření souměrnosti podle nadroviny $f(X) = X + (C^T X + c) \cdot L$, kde $L = \lambda C$ a podmínka involutornosti ($C^T L + 2 = 0$, neboli $\lambda = \frac{-2}{C^T C}$).

Souměrnosti podle podprostoru

Souměrnost podle podprostoru, definice (analogická definici v $\mathbb{E}_n$). Příklady souměrností v $\mathbb{E}_2$ a v $\mathbb{E}_3$. Involutorní shodnosti jsou právě souměrnosti.

Klasifikace shodností roviny

Tvar matice asociovaného homomorfismu, odvození na základě podmínky $A^T A = E$:

shodnosti přímé: $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ a nepřímé: $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$.

Kompletní klasifikace shodností roviny (uvědomění si různých kombinací samodružných bodů a směrů).

Orientačně: klasifikace shodností $\mathbb{E}_3$ (uvědomění si různých kombinací samodružných bodů a směrů).

Podobná zobrazení

Definice podobného zobrazení. Každé podobné zobrazení s koeficientem $k > 0$ lze složit ze stejnolehlosti s koeficientem k a shodného zobrazení.

Důsledky: podobné zobrazení je afinní, je určeno pomocí obrazů $n + 1$ LNZ bodů, analytické vyjádření podobného zobrazení je $f(X) = AX + \vec{b}$, přičemž $A^T A = k^2 E$.

Podobnost, definice, složením dvou podobností s koeficienty k_1, k_2 dostaneme opět podobnost

s koeficientem $k_1 k_2$. Všechny podobnosti daného eukleidovského prostoru tvoří při skládání grupu (grupa podobností prostoru $\mathbb{E}$).

Vlastní podobnost, myšlenka inkluzivní a exkluzivní klasifikace: jsou shodnosti také podobnostmi?

Samodružné body a směry podobností. Každá vlastní podobnost má právě jeden samodružný bod. Vlastní čísla λ podobností musí splňovat $|\lambda| = k$, tj. mohou být rovna pouze k a/nebo $-k$.

Kompletní klasifikace podobností roviny (uvědomění si různých kombinací samodružných bodů a směrů).

Každá vlastní podobnost je buď stejnoolehlostí, nebo stejnoolehlostí složenou s otočením kolem středu stejnoolehlosti, nebo stejnoolehlostí složenou s osovou souměrností, jejíž osa prochází středem stejnoolehlosti.

Tvar matice asociovaného homomorfismu, odvození na základě podmínky $A^T A = k^2 E$:

podobnosti přímé: $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ a nepřímé: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

Orientačně: klasifikace podobností $\mathbb{E}_3$ (uvědomění si různých kombinací samodružných bodů a směrů).

Přehled geometrických zobrazení

Souvislosti mezi jednotlivými grupami geometrických zobrazení. Například:

$$\{\text{id}\} \subset \text{translace} \subset \text{shodnosti} \subset \text{podobnosti} \subset \text{afinity}$$

$$\{\text{id}\} \subset \text{translace} \subset \text{homothetie} \subset \text{afinity}$$

Kruhová inverze

Kruhová inverze

Definice a její důsledky: základní kružnice, body ležící vně/na/uvnitř základní kružnice se zobrazí dovnitř/na/vně základní kružnice; analytické vyjádření kruhové inverze; involutornost inverze.

Konstrukce obrazu jednoho bodu v kruhové inverzi pomocí stereografické projekce. Obraz středu inverze, nevlastní bod, Möbiův prostor. Obraz přímky procházející/neprocházející středem inverze, obraz kružnice procházející/neprocházející středem inverze. Bez důkazu: inverze je konformní zobrazení.

Grupa kruhových/sférických transformací – bez důkazů

Složením dvou inverzí se stejným středem je stejnoolehlost, složením inverze a stejnoolehlosti je inverze. Inverze a stejnoolehlosti s tímž středem tvoří grupu.

Složením dvou inverzí s různými středy je zobrazení, které je složením podobnosti a inverze.

Kruhová/sférická transformace Möbiova prostoru: transformace, která je buď podobnost, nebo složením podobnosti a kruhové/sférické inverze. Vlastní kruhová/sférická transformace. Všechny kruhové/sférické transformace Möbiova prostoru tvoří vzhledem ke skládání grupu (grupa kruhových/sférických transformací).

Průnik grupy afinit (rozšířených na Möbiův prostor) a grupy kruhových/sférických transformací je grupa podobností.