

ŘEŠENÍ

Cvičení 1. (a) Vektor (X, Y) nabývá hodnot v $\{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2\}$ jeho sdružené rozdělení je dáno vnitřkem tabulky

X \ Y	0	1	2	Σ
0	0	0	1/8	1/8
1	0	1/4	1/8	3/8
2	1/8	1/4	0	3/8
3	1/8	0	0	1/8
Σ	1/4	1/2	1/4	1

Z tabulky tedy

$$p_{00} = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0,$$

$$p_{01} = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0$$

$$p_{02} = \mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = 1/8$$

$$p_{10} = \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = 0$$

$$p_{11} = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 1/4$$

$$p_{12} = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = 1/8$$

...

(b) $X \in \{0, 1, 2, 3\}$ a z tabulky výše

$$p_0^X = \mathbb{P}(X = 0) = 1/8$$

$$p_1^X = \mathbb{P}(X = 1) = 3/8$$

$$p_2^X = \mathbb{P}(X = 2) = 3/8$$

$$p_3^X = \mathbb{P}(X = 3) = 1/8$$

$Y \in \{0, 1, 2\}$ a z tabulky výše

$$p_0^Y = \mathbb{P}(Y = 0) = 1/4$$

$$p_1^Y = \mathbb{P}(Y = 1) = 1/2$$

$$p_2^Y = \mathbb{P}(Y = 2) = 1/4$$

(c) Nejsou nezávislé, neboť například $p_{00} = 0 \neq 1/8 \cdot 1/4 = p_0^X \cdot p_0^Y$.

(d) Například $U = \mathbf{1}\{\text{nejmladší dítě je dcera}\}$, $V = \mathbf{1}\{\text{nejstarší dítě je syn}\}$.

Cvičení 2. (a) Vektor (X, Y) nabývá hodnot v $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ jeho sdružené rozdělení je dáno vnitřkem tabulky

X \ Y	0	1	2	Σ
0	0	1/10	1/10	1/5
1	1/10	2/5	1/10	3/5
2	1/10	1/10	0	1/5
Σ	1/5	3/5	1/5	1

Z tabulky tedy

$$\begin{aligned}p_{00} &= \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0, \\p_{01} &= \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 1/10 \\p_{02} &= \mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = 1/10 \\p_{10} &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = 1/10 \\p_{11} &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 2/5 \\p_{12} &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = 1/10 \\&\dots\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(\text{alespoň dvě vytažené jsou stejné}) = 1 - \mathbb{P}(\text{všechny vytažené jsou různé}) = 1 - \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 1 - 2/5 = 3/5$

(b) Náhodné veličiny X a Y nejsou nezávislé, neboť například $p_{00} = 0 \neq 1/5 \cdot 1/5 = p_0^X \cdot p_0^Y$

Cvičení 3. $\log(3) - \log(2)$

Cvičení 4. $\frac{81}{5}$

Cvičení 5. (a) $c = 1$ (b) Rozdělení částky zaplacené za jídlo: $X \in (0, 1)$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^1 x + y dy = x + \frac{1}{2} & \text{pro } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Rozdělení částky zaplacené za nápoje: $Y \in (0, 1)$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^1 x + y dx = y + \frac{1}{2} & \text{pro } 0 < y < 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

(b) Náhodné veličiny X a Y nejsou nezávislé, neboť rovnost $x + y = (x + \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2})$ neplatí skoro všude, tj. mimo body $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

(c)

$$\mathbb{P}(Y > X) = \mathbb{P}(Y \in [X, 1]) = \int_0^1 \int_x^1 x + y dy dx = \frac{1}{2}$$