

PŘÍKLADY K CVIČENÍ Č.6

II.5. KOVARIANCE A KORELACE

Cvičení 1. Náhodná veličina X udává počet dcer v náhodně vybrané rodině se třemi dětmi, veličina Y udává počet starších bratrů nejmladšího dítěte v téže rodině.

- (a) Spočítejte kovarianci X a Y .
- (b) Spočtěte korelaci X a Y .

Cvičení 2. V šuplíku je 6 ponožek: 2 bílé, 2 černé a 2 oranžové. Potmě náhodně vytáhneme z šuplíku 3 ponožky. Označme jako X počet vytažených bílých ponožek a Y je počet vytažených oranžových ponožek.

- (a) Spočítejte kovarianci X a Y .
- (b) Spočtěte korelaci X a Y .

Cvičení 3. Náhodný vektor (X, Y) má spojitě rozdělení charakterizované sdruženou hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{pro } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (a) Určete $c > 0$ tak, aby f byla hustota.
- (b) Spočtěte kovarianci $\text{cov}(X, Y)$.
- (c) Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé,
- (d) Napište varianční matici vektoru (X, Y) .
- (e) Spočtěte $\mathbb{E}(X + Y)$ a $\text{var}(X + Y)$.

Cvičení 4. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-1, 1)$. Označme $Y = X^2$. Spočtěte kovarianci veličin X a Y a jejich korelační koeficient ρ_{XY} . Jsou X a Y nezávislé?

Cvičení 5. Náhodný vektor (X, Y) má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu, tj. spojitě rozdělení s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{pro } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (a) Určete konstantu $c > 0$, aby f byla hustota.
- (b) Spočtěte kovarianci a korelaci X a Y .
- (c) Jsou X a Y nezávislé?

Cvičení 6. V rybníce plave 100 rybiček, z nichž je a zlatých. Náhodně vylovíme 5 rybiček a náhodná veličina X udává, kolik zlatých rybiček jsme vylovili. Spočtěte očekávanou hodnotu X . Náповěda: Použijte rozklad na součet 0 – 1 (tj. alternativních) náhodných veličin.

Domácí úkol - do 18.11.: Náhodný vektor (X, Y) má spojitě rozdělení s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x-y/2} & \text{pro } x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jaká jsou marginální rozdělení X a Y ?