1 Číselné řady

Definice 1 (číselná řada a její součet)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je číselná posloupnost. Symbol* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *budeme nazývat nekonečnou řadou, čísla* $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ *pak jejími čatečnými součty.*

Existuje-li limita $s = \lim_{N\to\infty} s_N$*, nazýváme ji souštem řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *(píšeme* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$*). Říkáme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*:*

- *konverguje, pokud* $s \in \mathbb{R}$*,*
- *diverguje, pokud nekonverguje,*
- *diverguje k* $\pm\infty$*, pokud* $s = \pm\infty$*,*
- *osciluje, pokud není* s *definováno.*

Poznámky a příklady. *1. Platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \begin{cases} \text{konverguje, pokud } |q| < 1, \\ \text{diverguje k } +\infty, \text{ pokud } q \geq 1, \\ \text{v ostatních případech osciluje.} \end{cases}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{konverguje, pokud } \alpha > 1, \\ \text{v ostatních případech diverguje k } +\infty. \end{cases}$$

2. *Budeme (podobně jako u posloupností) používat i řady začínající jiným indexem než* $n = 1$*. Platí (pro libovolné* $k \in \mathbb{N}$*) že*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=k}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje.}$$

Konvergence řady tedy nezávisí na konečně mnoha členech (případný součet však pochopitelně ano).

3. *(aritmetika řad) pokud* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$*,* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$*,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, potom*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B,$$

pokud má pravá strana smysl. Speciálněe pro $\alpha \neq 0$ *platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n \quad \text{konverguje.}$$

1.1 Řady s kladnými členy

Tedy řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pro které platí $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Limita $\lim_{N\to\infty} s_N$ v tomto případě (z důvodu monotonie) vždy existuje - buď konečná, nebo $+\infty$ - proto často píšeme

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 2 (nutná podmínka konvergence řady). *Pokud nekonečná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Věta 3 (srovnávající kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s kladnými členy a předpokládejme, že existuje* $N \in \mathbb{N}$ *takové, že* $b_n \geq a_n$, $n \geq N$. *Potom*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, *nebo ekvivalentně*
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Věta 4 (limitní srovnávající kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s kladnými členy a* $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = L$. *Potom*

1. *pokud* $L > 0$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,
2. *pokud* $L < \infty$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$,
3. *pokud* $L \in (0, \infty)$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

Věta 5 (podílové kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy a* $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Potom*

1. pokud $L < 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,

2. pokud $L > 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Věta 6 (odmocninové kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy a* $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. *Potom*

1. pokud $L < 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,

2. pokud $L > 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Důležité limity: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.
Například podle podílového i odmosninového kritéria snadno dostaneme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < 0.$$

v případě, že $L = 1$, nedávají kirtéria o konvergenci žádnou informaci, nejsou tedy schopna odhalit divergenci ani zjevně divergující řady $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, kterou nejsou schopna odlišit od konvergující řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Poznamenejme ještě, že ve formulaci odmocninového kritéria můžeme v definici L nahradit limitu limes superior.

Věta 7 (integrální kritérium). *Nechť* $N \in \mathbb{N}$ *a* $f : [N, \infty) \to [0, \infty)$ *je nerostoucí a spojitá na intervalu* $[N, \infty)$. *Pokud* $a_n = f(n)$, $n \geq N$, *potom*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{konverguje} \quad \Longleftrightarrow \quad (N)\int_N^{\infty} f(x)\, dx < \infty.$$

Například konvergence integrálu $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^2 x}\, dx$ tedy implikuje konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$.

1.2 Řady s obecnými členy - alternující řady

Jde o řady de tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, kde $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Definice 8 (absolutní konvergence)**.** *Říkáme, že nekonečná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně, pokud platí* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Věta 9 (konvergence a absolutní konvergence)**.** *Pokud řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně, potom konverguje.*

Věta 10 (Leibnizovo kritérium)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je nerostoucí posloupnost splňující* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Potom řada* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *konverguje.*

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje, ale nekonverguje absolutně. Je dobré si všimnout, že řady jak kladných částí, tak záporných částí této řady obě divergují k $+\infty$. Takto je to vždy v případě konvergentních řad, které nekonvergují absolutně.