1 Aplikace určitého integrálu

Nechť $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ je křivka a nechť $D \in \mathfrak{D}([a, b])$ je dělení s dělícími body $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Potom definujeme

$$L(\gamma, D) = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(x_{i+1}) - \gamma(x_i)|,$$

kde $|a - b|$ je eukleidovská vzdálenost definovaná jako

$$|a - b| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}.$$

Délku křivky γ pak definujeme jako

$$l(\gamma) = \sup_{D \in \mathfrak{D}([a,b])} L(\gamma, D).$$

Speciálním případem je délka grafu funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Takový graf má přirozenou parametrizaci $\gamma : t \mapsto (t, f(t))$, $t \in [a, b]$. Pro tento speciální případ jsme za předpokladu, že f' je spojitá na $[a, b]$ (tj., f lze rozšířit na otevřený nadinterval intervalu $[a, b]$ na spojitě diferencovatelnou funkci) odvodili vzoreček

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x)^2)}\, dx.$$

Dále jsme definovali tzv. gamma funkci $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

a dokázali jsme

- $\Gamma(1) = 1$ (přímým výpočtem),
- $\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x)$ (per partes),
- $\Gamma(n + 1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$ (vyplývá z předchozích dvou vlastností),
- Γ je skutečně dobře definovaná na $(0, \infty)$ (tj. integrál konverguje).