1 Určité integrály

Věta 1 (z minulého semestru)**.** *Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a nechť F je primitivní funkce k f na (a,b), potom*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$$

Definice 2 (Newtonův integrál)**.** *Nechť f je definována na intervalu (a,b), $a,b \in \mathbb{R}^*$, $a<b$, a má na (a,b) primitivní funkci F. Definujeme* **Newtonův integrál** *z funkce f na od a do b jako*

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x),$$

pokud má výraz na pravé straně smysl.

Výraz $\lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$ nazýváme přírůstkem funkce F od a do b a zkráceně jej značíme $[F(x)]_a^b$.

Poznámky a příklady. *1. Je-li $(N)\int_a^b f \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že f je newtonovsky integrovatelná na (a,b), nebo také, že daný Newtonův integrál konverguje. Množinu všech newtonovsky integrovatelných funkcí značíme $\mathcal{N}((a,b))$.*

2. Platí

$$\int_0^1 x^p\,dx = \begin{cases} \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}, & p+1>0,\\ [\log x]_0^1 = \infty, & p+1=0,\\ \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \infty, & p+1<0, \end{cases}$$

a

$$\int_1^\infty x^p\,dx = \begin{cases} \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_1^\infty = \infty, & p+1>0,\\ [\log x]_1^\infty = \infty, & p+1=0\\ \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_1^\infty = \frac{1}{p+1}, & p+1<0. \end{cases}$$

Speciálně dostáváme, že Newtonův integrál může být konečný i pro neomezené funkce a i pro neomezené intervaly. Rovněž takto snadno dostaneme funkci, pro kterou platí $(N)\int_0^1 f \in \mathbb{R}$, ale $(R)\int_0^1 f$ neexistuje.

3. Na druhou stranu, např. pro funkci $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in [-1,1]$, platí, že $(R)\int_{-1}^1 f$ existuje, ale $(N)\int_{-1}^1 f$ není definován, protože f nemá na $(-1,1)$ primitivní funkci.

4. (per partes pro Newtonův integrál) Nechť mají funkce f a g na intervalu (a,b), $a<b$, primitivní funkci F, resp. G. Potom

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\,dx,$$

má-li pravá strana smysl.

5. *(substituce pro Newtonův integrál) Nechť* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *a* $\varphi : (\alpha, \beta) \overset{na}{\to} (a, b)$ *má vlastní na* (α, β) *a* $\varphi' > 0$ *(nebo* $\varphi' < 0$*) na* (α, β)*. Potom*

$$(N) \int_a^b f(x)\, dx = (N) \int_\alpha^\beta |\varphi'(x)| \cdot f \circ \varphi(x)\, dx,$$

pokud má alespoň jedna strana smysl.

Věta 3 (vztah Riemannova e Newtonova integrálu)**.** *Je-li* $f \in \mathfrak{R}([a, b]) \cap \mathcal{N}((a, b))$*, potom*

$$(R) \int_a^b f = (N) \int_a^b f.$$