Sada příkladů na 9. týden

Používáme následující věty o integrálech závislých na parametru:

Věta 1 (o limitě integrálu závislého na parametru). *Nechť $P \subset \mathbb{R}$ je otevřená, $p_0 \in P$, $A \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f : P \times A \to \mathbb{R}$. Předpokládejme navíc, že*

- *funkce $x \mapsto f(p,x)$ je měřitelná pro všechna $p \in P \setminus \{p_0\}$*
- *limita $\lim_{p \to p_0} f(p,x) =: F(x)$ existuje pro s.v. $x \in A$,*
- *existuje $g \in L(A)$, že $|f(p,x)| \le g(x)$ pro s.v. $x \in A$ a všechna $p \in P$.*

Potom $F \in \mathcal{L}(A)$ a platí

$$\lim_{p \to p_0} \int f(p,x)\, dx = \int F$$

Věta 2 (o spojitosti integrálu závislého na parametru). *Nechť $P \subset \mathbb{R}$ je otevřená, $p_0 \in P$, $A \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f : P \times A \to \mathbb{R}$. Předpokládejme navíc, že*

- *funkce $x \mapsto f(p,x)$ je měřitelná pro všechna $p \in P$*
- *funkce $p \mapsto f(p,x)$ je spojitá v p_0 pro s.v. $x \in A$,*
- *existuje $g \in L(A)$, že $|f(p,x)| \le g(x)$ pro s.v. $x \in A$ a všechna $p \in P$.*

Potom je funkce $p \mapsto \int f(p,x)\, dx$ spojitá v bodě p_0.

Věta 3 (o derivaci integrálu závislého na parametru). *Nechť $P \subset \mathbb{R}$ je otevřená, $p_0 \in P$, $A \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f : P \times A \to \mathbb{R}$. Předpokládejme navíc, že*

- *funkce $x \mapsto f(p,x)$ je měřitelná pro všechna $p \in P$*
- *existuje $\frac{\partial f}{\partial p}(p,x)$ pro všechna $p \in P$ a s.v. $x \in A$,*
- *existuje $g \in L(A)$, že $\left|\frac{\partial f}{\partial p}(p,x)\right| \le g(x)$ pro s.v. $x \in A$ a všechna $p \in P$.*

Potom má funkce $F : p \mapsto \int f(p,x)\, dx$ vlastní derivaci na P a pro $p \in P$ platí

$$F'(p) = \int \frac{\partial f}{\partial p}(p,x)\, dx.$$

Příklady:

1. Dokažte, že funkce
$$F(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2}\, dx$$
je spojitá na $(0, \infty)$.

2. Dokažte, že funkce
$$F(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx,$$
je spojitá na $(0, \infty)$.

3. Dokažte, že funkce
$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax}\, dx,$$
je spojitá na $(0, \infty)$.

4. Dokažte, že funkce
$$F(a) = \int_0^1 \log(x^2 + a^2)\, dx,$$
je spojitá na $(0, \infty)$.

5. Dokažte, že funkce
$$F(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx,$$
má na intervalu $(0, \infty)$ derivace všech řádů a spočtěte je (ve formě integrálu závislého na parametru).

6. Spočtěte
$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x}\, dx,$$
pro $a \in (-1, \infty)$.

7. Spočtěte
$$F(a, b) = \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} \cdot e^{-bx}\, dx,$$
pro $a \in \mathbb{R}$, $b \in (0, \infty)$.

*8. Spočtěte
$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \cdot \log\left(\frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x}\right)\, dx,$$
pro $a \in [-1, 1]$.

**9. Spočtěte

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\arctan(ax) \cdot \arctan(bx)}{x^2}\, dx,$$

pro $a, b \in \mathbb{R}$.

10. Načrtněte graf funkce

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x^2}\, dx$$

na $[0, \infty)$. Ukažte, že na $(0, \infty)$ platí $F''(a) + F(a) = \frac{1}{a}$.