Spojité reálné vektory

Měřitelné zobrazení $X = (X_1, \dots, X_n)^\intercal : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(R^n))$ nazveme n-rozměrný reálný náhodný vektor. Ekvivalentně $X = (X_1, \dots, X_n)^\intercal$ je n-rozměrný reálný náhodný vektor právě tehdy, když X_j je pro každé $j \le n$ reálná náhodná veličina, tj. $X_j : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ je měřitelné zobrazení. Buď P pravděpodobnostiní míra na $(\Omega, \mathcal{A})$. Odpovídající rozdělění náhodného vektoru X je pak dáno vzorcem $P_X(B) = P(X \in B)$, kdykoli $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Nezáporná měřitelná funkce f_X je hustotou vektoru X, pokud (dle definice) tj. právě tehdy, když

$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)\,\mathrm{d}x, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Je-li $h : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ měřitelné zobrazení pak $h(X)$ je reálná náhodná veličina. Má-li tato veličina střední hodnotu, je dána vzorcem

$$Eh(X) = \int h(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Má-li reálná náhodná veličina X konečnou stř. hodnotu $EX \in \mathbb{R}$, pak definujeme její rozptyl vzorcem

$$\mathrm{var}(X) = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2 \ge 0.$$

Nechť $Z = (X, Y)^\intercal$ je dvourozměrný reálný náhodný vektor, tj. $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ jsou měřitelné funkce. Existují-li konečné střední hodnoty $EX, EY \in \mathbb{R}$, kovarianci veličin X, Y předpisem

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY) = EXY - EX \cdot EY$$

Mají-li navíc veličiny X, Y konečné druhé momenty $EX^2, EY^2 < \infty$ a pokud jsou nedegenerované tj. $\mathrm{var}(X), \mathrm{var}(Y) > 0$, pak definujeme korelaci mezi X a Y (také korelační koeficient) vzorcem

$$\rho_{X,Y} = \mathrm{cor}(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X) \cdot \mathrm{var}(Y)}} \in [-1, 1].$$

---

(1) Dvojice součástek má dobu životnosti popsánu sdruženou hustotou

$$f_{X,Y}(x, y) = \tfrac{1}{2}\, e^{-x-y/2} \cdot 1_{[x,y>0]}.$$

  (a) Jaká je pravděpodobnost, že druhá součástka přežije první?
  (b) Jaká je pravděpodobnost, že druhá součástka alespoň dvakrát přežije první?
  (c) Určete distribuční funkci náhodné veličiny $Z = X + Y$.
  (d) Určete distribuční funkci náhodné veličiny $W = X - Y$.

(2) Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na $(0, 1)$. Najděte distribuční funkce a hustotu náhodné veličiny $Z = X + Y$.

(3) Najděte střední hodnotu pro náhodné veličiny s hustotami
  (a) $f(x) = 3x^2 \cdot 1_{(0,1)}(x)$
  (b) $f(x) = 4x^3 \cdot 1_{(0,1)}(x)$
  (c) $f(x) = \sin x \cdot 1_{(0,\frac{\pi}{2})}(x)$
  (d) $f(x) = \frac{1}{2}\,\sin x \cdot 1_{(0,\pi)}(x)$.

(4) Náhodná veličina má spojitou distribuční funkci ve tvaru

$$F(x) = [a + b \cdot \arcsin(x)] \cdot 1_{(-1,1)}(x) + 1_{[1,\infty)}(x)$$

Určete konstanty a, b a střední hodnotu n.v. X.

(5) Spočtěte korelační koeficient n.v. X a $Y = X^2$, kde $X \sim R(0, 1)$. Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?

(6) Nechť X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(1, 2)$. Určete korelační koeficient $\rho_{X,1/X}$.

(7) Určete korelační koeficient složek náhodného vektoru $(X, Y)^\intercal$, který má rovnoměrné rozdělení v trojúhelníku ohraničeném přímkami $x = 0, y = 0, x + y = c$, kde $c > 0$ je parametr.