

1. Základní topologické pojmy

1.1. Topologický prostor, báze, subbáze

Definice. Necht X je množina. Řekneme, že $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ je *topologie* na X , pokud platí

(T1) $\emptyset, X \in \tau$,

(T2) jsou-li $U, V \in \tau$, pak $U \cap V \in \tau$,

(T3) je-li $\mathcal{U} \subseteq \tau$, pak $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$.

Dvojice (X, τ) se pak nazývá *topologický prostor*. Prvky X se nazývají *bod*y, prvky τ se nazývají *otevřené* množiny. Množina $V \subseteq X$ se nazývá *okolí* bodu $x \in X$, pokud existuje $U \in \tau$, pro které $x \in U \subseteq V$. Množinu všech okolí bodu x značíme $\mathcal{U}(x)$. Soubor množin $\mathcal{B} \subseteq \tau$ se nazývá *báze* prostoru X , pokud každé $U \in \tau$ lze vyjádřit jako sjednocení nějakého $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$. Soubor $\mathcal{S} \subseteq \tau$ se nazývá *subbáze*, pokud systém $\{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}, \mathcal{F} \text{ je konečná}\}$ je báze.

Příklady. • Je-li (X, ρ) metrický prostor, pak soubor všech ρ -otevřených množin tvoří topologii na X . Říkáme pak, že tato topologie je *generovaná metrikou* ρ . Báze topologie generované metrikou je například $\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$. Topologický prostor je *metrizovatelný*, pokud je jeho topologie generovaná nějakou metrikou.

- Na $\mathbb{R}$ s obvyklou metrikou bázi topologie tvoří otevřené intervaly, subbáze je například systém $\{(-\infty, b), (a, \infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Na $\mathbb{R}^2$ s obvyklou metrikou je báze topologie například $\{(a, b) \times (c, d) : a < b, c < d\}$, subbáze topologie roviny je například $\{\mathbb{R} \times (a, b), (a, b) \times \mathbb{R} : a < b\}$.
- Na každé množině X máme dvě triviální topologie. Dvojice $(X, \mathcal{P}(X))$ se nazývá *diskrétní prostor* ($\mathcal{P}(X)$ je diskrétní topologie). Dvojice $(X, \{\emptyset, X\})$ se nazývá *indiskrétní prostor* ($\{\emptyset, X\}$ je indiskrétní topologie). Každý diskrétní prostor je metrizovatelný. Indiskrétní alespoň dvou-bodový prostor není metrizovatelný.

Tvrzení 1 (Vlastnosti báze). *Je-li (X, τ) topologický prostor a $\mathcal{B}$ jeho báze, pak*

(B1) *pro každé $U, V \in \mathcal{B}$ a $x \in U \cap V$ existuje $W \in \mathcal{B}$, že $x \in W \subseteq U \cap V$,*

(B2) $\bigcup \mathcal{B} = X$.

Je-li X množina a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ systém množin splňující podmínky (B1) a (B2), pak existuje jediná topologie na X , jejíž báze je $\mathcal{B}$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Důsledek 2. *Je-li X množina a $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ splní $\bigcup \mathcal{S} = X$, pak existuje právě jedna topologie na X , jejíž subbáze je $\mathcal{S}$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Příklady. • Ať $(X, <)$ je lineárně uspořádaná množina. Pak topologie generovaná uspořádáním $<$ je topologie τ generovaná bází

$$\mathcal{B} = \{(a, b), a, b \in X, a < b\} \cup \{(\leftarrow, b) : b \in X\} \cup \{(a, \rightarrow) : a \in X\} \cup \{X\}$$

(prvkům $\mathcal{B}$ říkáme otevřené intervaly). Pak říkáme, že (X, τ) je *uspořádaný topologický prostor*.

- *Sorgenfreyova přímka* je množina $\mathbb{R}$ s topologií generovanou bází $\mathcal{B} = \{[a, b) : a < b\}$.

Tvrzení 3 (Charakterizace otevřených množin pomocí okolí). *Ať (X, τ) je topologický prostor a $U \subseteq X$. Pak $U \in \tau$, právě když*

$$\forall x \in U \exists V \in \mathcal{U}(x) : V \subseteq U.$$

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 4 (Vlastnosti systému všech okolí). *Je-li (X, τ) topologický prostor, pak pro každé $x \in X$ soubor množin $\mathcal{U}(x)$ splňuje:*

(U1) $\mathcal{U}(x) \neq \emptyset$ a $x \in \bigcap \mathcal{U}(x)$,

(U2) je-li $U \in \mathcal{U}(x)$ a $U \subseteq V \subseteq X$, pak $V \in \mathcal{U}(x)$,

(U3) jsou-li $U, V \in \mathcal{U}(x)$, pak $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$,

(U4) pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$ existuje $V \in \mathcal{U}(x)$, že pro každé $y \in V$ je $U \in \mathcal{U}(y)$.

Je-li X libovolná množina a soubory množin $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$, $x \in X$, splňují podmínky (U1) - (U4), pak na množině X existuje jediná topologie τ jejíž systémy okolí jsou $\{\mathcal{U}(x)\}_{x \in X}$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Definice. Necht (X, τ) je topologický prostor. Systém množin $\mathcal{B}(x)$ se nazývá *báze okolí* v bodě x , pokud $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$ a pro každé $V \in \mathcal{U}(x)$ existuje prvek $U \in \mathcal{B}(x)$, že $U \subseteq V$. Indexovaný soubor $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ se nazývá *báze okolí prostoru X* .

Tvrzení 5 (Vlastnosti báze okolí). *Je-li (X, τ) topologický prostor a $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ báze okolí, pak pro každé $x \in X$ soubor množin $\mathcal{B}(x)$ splňuje*

(O1) $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ a $x \in \bigcap \mathcal{B}(x)$,

(O2) pro každé $U, V \in \mathcal{B}(x)$ existuje $W \in \mathcal{B}(x)$, že $W \subseteq U \cap V$.

(O3) pro každé $U \in \mathcal{B}(x)$ existuje $V \in \mathcal{B}(x)$, že pro každé $y \in V$ existuje $W \in \mathcal{B}(y)$, že $W \subseteq U$.

Je-li X libovolná množina a soubory množin $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$, $x \in X$, splňují podmínky (O1), (O2) a (O3), pak na množině X existuje jediná topologie τ s bázi okolí $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$.

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. □

Definice. *Váhu* topologického prostoru X značíme $w(X)$ a je to nejmenší mohutnost báze. Přesnější značení $w(X, \tau)$ použijeme tehdy, pokud topologie τ není zřejmá z kontextu. *Charakter* v bodě $x \in X$ značíme $\chi(x, X)$ a je to nejmenší mohutnost báze okolí v bodě x . Charakter prostoru X je supremum charakterů v jednotlivých bodech.

Příklady. • Je-li X metrizovatelný, pak má spočetný charakter. Dále pak platí že $w(X) \leq \omega$ právě když je separabilní.

- Je-li X diskrétní, pak $\chi(X) = 1$ a $w(X) = |X|$.
- Je-li X indiskrétní, pak $w(X) = \chi(X) = 1$.

konec 1. přednášky (29. 9. 2025)

Tvrzení 6. *Necht X je topologický prostor. Pak $\chi(X) \leq w(X) \leq 2^{|X|}$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

1.2. Vnitřek, uzávěr a hranice, husté a řídké množiny, hromadné a izolované body, spojitá zobrazení

Definice. Množina F v topologickém prostoru (X, τ) se nazývá *uzavřená*, pokud $X \setminus F$ je otevřená. Množina se nazývá *obojetná*, pokud je otevřená i uzavřená zároveň. Je-li $A \subseteq X$, pak *uzávěr* množiny A je množina

$$\overline{A} := \bigcap \{F : F \text{ je uzavřená}, A \subseteq F\}.$$

Vnitřek množiny A je množina $\text{Int } A = \bigcup \{U \in \tau : U \subseteq A\}$. *Hranice* množiny A je $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Poznámka. Je snadné si uvědomit že $\emptyset$ a X jsou obojetné množiny a že systém uzavřených množin je uzavřený na konečná sjednocení a libovolné průniky. Uzávěr i hranice jsou uzavřené množiny, vnitřek je otevřená množina. Množina je uzavřená, právě když se rovná svému uzávěru, a je otevřená, právě když se rovná svému vnitřku.

Tvrzení 7 (Vztah vnitřku a uzávěru). *Nechť X je topologický prostor. Pak*

$$X \setminus \overline{A} = \text{Int}(X \setminus A) \quad \text{a} \quad X \setminus \text{Int } A = \overline{(X \setminus A)}.$$

Důkaz. Důkaz je snadný, byl vynechán, může být u zkoušky použit jakožto příklad navíc. □

Tvrzení 8 (Charakterizace uzávěru). *Nechť X je topologický prostor, $x \in X$, $A \subseteq X$ a $\mathcal{B}(x)$ báze okolí v bodě x . Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (1) $x \in \overline{A}$,
- (2) pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$ je $U \cap A \neq \emptyset$,
- (3) pro každé $U \in \mathcal{B}(x)$ je $U \cap A \neq \emptyset$.

Speciálně, je-li $U \subset X$ otevřená pak

$$U \cap A = \emptyset \Leftrightarrow U \cap \overline{A} = \emptyset.$$

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 9 (Charakterizace hranice). *Ať X je topologický prostor, $A \subseteq X$ a $x \in X$. Pak*

$$x \in \partial A \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) : (U \cap A \neq \emptyset \ \& \ U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset).$$

Důkaz. Důkaz je snadný, byl vynechán, může být u zkoušky použit jakožto příklad navíc. □

Definice. Ať X je topologický prostor a $A \subset X$. Množina A se nazývá *hustá*, pokud $\overline{A} = X$. Množina A se nazývá *řídká*, pokud $X \setminus \overline{A}$ je hustá v X . *Hustota* prostoru X je nejmenší mohutnost husté podmnožiny, značí se $d(X)$. Řekneme, že X je *separabilní*, pokud $d(X) \leq \omega$.

Tvrzení 10 (Charakterizace hustých a řídkých množin). *Ať X je topologický prostor a $A \subset X$.*

- *A je hustá v X , právě když každá neprázdná otevřená množina $U \subseteq X$ protíná A ,*
- *A je řídká v X , právě když $\text{Int}(\overline{A}) = \emptyset$,*
- *A je řídká v X , právě když každá otevřená neprázdná množina V obsahuje neprázdnou otevřenou množinu U , která je disjunktní s A .*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 11 (Vztah váhy a hustoty). *Pro každý topologický prostor X platí $d(X) \leq w(X)$. Pokud je X metrizovatelný, pak $d(X) = w(X)$.*

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. □

Definice. Bod $x \in A \subseteq X$ se nazývá *izolovaným bodem* množiny A , pokud existuje otevřená množina $U \subseteq X$, že $U \cap A = \{x\}$. Bod $x \in X$ se nazývá *hromadným bodem* množiny A , pokud každé okolí U bodu x protíná $A \setminus \{x\}$. Množinu všech hromadných bodů množiny A značíme A' (tzv. derivace množiny A).

Příklady. V diskrétním prostoru jsou všechny body izolované a žádné hromadné. Je-li $X = \mathbb{R}$ a $A = \mathbb{Q}$, pak $A' = \mathbb{R}$ a žádný bod z A není izolovaný.

Tvrzení 12 (Vlastnosti derivace). *Ať X je topologický prostor a $A \subset X$. Pak $\overline{A} = A \cup A'$ a $(A \cup B)' = A' \cup B'$.*

Důkaz. Důkaz je snadný, byl vynechán, může být u zkoušky použit jakožto příklad navíc. □

Definice. Ať $(X, \tau), (Y, \sigma)$ jsou dva topologické prostory a $f: X \rightarrow Y$ je funkce. Funkce f se nazývá *spojitá*, pokud pro každé $U \in \sigma$ je $f^{-1}(U) \in \tau$. Zobrazení f se nazývá *homeomorfismus*, pokud f je bijekce a f i f^{-1} jsou spojitá. Zobrazení f je *vnoření*, pokud jeho zúžení $f: X \rightarrow f(X)$ je homeomorfismus na podprostor $f(X) \subset Y$. Řekneme, že f je *spojité v bodě x* , pokud pro každé okolí V bodu $f(x)$ existuje okolí U bodu x , že $f(U) \subseteq V$. Zobrazení f se nazývá *otevřené/uzavřené*, pokud je množina $f(M)$ je otevřená/uzavřená v Y pro každou otevřenou/uzavřenou $M \subseteq X$.

Poznámka. Pokud jsou X, Y, Z topologické prostory a $x \in Z$ pak pokud je funkce $f: X \rightarrow Y$ spojitá (v bodě x), je i její restrikce $f|_Z$ spojitá (v bodě x).

Tvrzení 13 (Charakterizace spojitých zobrazení). *Ať $(X, \tau), (Y, \sigma)$ jsou topologické prostory a $f: X \rightarrow Y$ zobrazení a ať $\mathcal{B}$ je báze Y a $\mathcal{S}$ subbáze Y . Pak jsou následující podmínky ekvivalentní*

- (1) f je spojité,
- (2) vzory množin ze subbáze $\mathcal{S}$ jsou otevřené,
- (3) f je spojité v každém bodě,
- (4) vzory množin z báze $\mathcal{B}$ jsou otevřené,
- (5) vzory uzavřených množin jsou uzavřené,
- (6) pro každé $A \subseteq X$ platí $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Důkaz. Důkaz je snadný, byl vynechán, může být u zkoušky použit jakožto příklad navíc. □

Poznámka. Složení spojitých zobrazení je spojité.

konec 2. přednášky (6. 10. 2025)

Definice. Pokud (X, τ) je topologický prostor a $Y \subset X$. Uvažujme $\sigma := \{U \cap Y: U \in \tau\}$. Pak σ je topologie na Y a říkáme, že (Y, σ) je *podprostor* X .

Příklady. Pro metrizovatelné prostory platí, že váha je rovna hustotě a že podprostor separabilního prostoru je separabilní. Pro nemetrizovatelné prostory tato tvrzení již platit nemusí. Následující příklady budou postupně probrány na cvičení.

- Pokud je X double arrow space nebo Sorgenfreyova přímka, pak $d(X) = \omega < 2^\omega = w(X)$. Navíc, každý podprostor X je separabilní.
- Pokud je $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ nespočetný systém nekonečných množin, který je skoro disjunktní, pak pro příslušný Mrówka-Isbell space $X := \psi(\mathcal{A})$ platí $d(X) = \omega < |\mathcal{A}| = w(X)$. Navíc, X je separabilní ale obsahuje neseparabilní podprostor (konkrétněji, $\mathcal{A} \subset \psi(\mathcal{A})$ je nespočetný uzavřený podprostor, který je diskretní).

1.3. Nety a konvergence

Definice. Dvojice $(I, \leq)$ se nazývá *shora usměrněná* množina, pokud $\leq$ je částečné uspořádání na I (tj. binární reflexivní, tranzitivní a slabě antisymetrická relace) s vlastností, že pro $i, j \in I$ existuje $k \in I$, že $i \leq k$ a $j \leq k$. Symetrickým symbolem $\geq$ pak přirozeně myslíme inverzní relaci. *Net* v topologickém prostoru X je zobrazení z nějaké neprázdné usměrněné množiny do X . Speciálním případem je *posloupnost* (což je net indexovaný přirozenými čísly). Řekneme, že net $(x_i)_{i \in I}$ *konverguje* k bodu $x \in X$, pokud pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$ existuje $i \in I$, že pro každé $j \geq i$ platí $x_j \in U$. Bod x se pak nazývá *limita netu* $(x_i)_{i \in I}$.

Tvrzení 14 (Charakterizace uzávěru pomocí konvergence netů). *Ať X je topologický prostor a $A \subseteq X$. Pak*

- $x \in \overline{A}$ právě když x je limitou netu sestávajícího z bodů z A ,
- A je uzavřená právě když každý konvergentní net sestávající z bodů v A má limitu v A .

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 15 (Charakterizace spojitosti pomocí konvergence netů). *Ať X a Y jsou topologické prostory. Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je spojitě v bodě x , právě když pro každý net $(x_i)_{i \in I}$ konvergující k bodu x konverguje net $(f(x_i))_{i \in I}$ k $f(x)$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Příklad. Tvrzení 14 a Tvrzení 15 neplatí, pokud v něm slovo “net” nahradíme slovem “posloupnost”. Vskutku, zvolme nespočetnou množinu X s topologií

$$\tau := \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : X \setminus A \text{ je spočetná}\}.$$

Této topologii τ říkáme *ko-spočetná topologie*. Pak pro libovolnou nespočetnou množinu $A \subsetneq X$ platí, že A není uzavřená, ale zároveň každá konvergentní posloupnost sestávající z bodů z A je konstantní až na konečně mnoho prvků. Dále, pokud na $\{0, 1\}$ uvažujeme diskrétní topologii a funkci $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ definujeme předpisem $f(x) = 1$ pro $x \in A$ a $f(x) = 0$, pak f není spojitá funkce ale kdykoliv $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je konvergentní posloupnost v A , pak $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

1.4. Oddělovací axiomy

Definice. Topologický prostor X se nazývá

- T_0 , pokud pro každé různé body $x, y \in X$ existuje otevřená U , že $|U \cap \{x, y\}| = 1$,
- T_1 , pokud pro každé různé body $x, y \in X$ existuje otevřená U , že $x \in U$ a $y \notin U$,
- T_2 (nebo *Hausdorffův*), pokud pro každé různé body $x, y \in X$ existují otevřené disjunktní množiny U, V , že $x \in U, y \in V$,
- *regulární*, pokud pro každou uzavřenou $F \subseteq X$ a bod $x \in X \setminus F$ existují otevřené disjunktní množiny U, V , že $x \in U$ a $F \subseteq V$,
- *normální*, pokud pro každé dvě disjunktní uzavřené množiny E, F existují disjunktní otevřené množiny U, V , že $E \subseteq U$ a $F \subseteq V$,
- *úplně regulární*, pokud pro každou uzavřenou množinu F a bod $x \in X \setminus F$ existuje spojitá funkce $f: X \rightarrow [0, 1]$, že $f(x) = 0$ a $f(F) \subseteq \{1\}$,
- T_3 , pokud je regulární a T_1 ,
- $T_{3\frac{1}{2}}$ (nebo *Tichonovův*), pokud je úplně regulární a T_1 ,

- T_4 , pokud je normální a T_1 .

Poznámka. Platí implikace

$$T_4 \implies T_{3\frac{1}{2}} \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0,$$

ovšem první implikaci je relativně těžké dokázat (viz. Důsledek 19), ostatní je snadné. Žádnou z uvedených implikací nelze obrátit, což je v prvních třech případech obtížnější (viz. Příklady 1.4 a příklad Niemiýtzkého roviny, který bude předveden na cvičení, příklad že nelze obrátit druhou implikaci je nejsložitější a vynecháme jej, je sepsán ve skriptech).

Je jednoduché si rozmyslet, že vlastnosti $T_{3\frac{1}{2}}$, T_3 , T_2 , T_1 a T_0 se zachovávají na podprostorech a že vlastnost T_4 se zachová na uzavřených podprostorech. Obecně se normalita na podprostorech nezachová, příslušný protipříklad bude zmíněn později.

Lemma 16. *Ať (X, τ) je topologický prostor. Pak platí:*

- X je $T_1 \iff$ každá jednoprvková podmnožina X je uzavřená $\iff$ každá konečná podmnožina X je uzavřená.
- X je $T_2 \iff \forall x, y \in X, x \neq y \exists U \in \mathcal{U}(x): x \in U$ a $y \notin \overline{U}$.
- X je regulární $\iff \forall x \in X \forall U \in \mathcal{U}(x) \exists V \in \mathcal{U}(x): \overline{V} \subseteq U$.
- X je normální $\iff \forall V \in \tau \forall E \subseteq V$ uzavřenou $\exists U \in \tau: E \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.

Důkaz. Důkaz je snadný, byl vynechán, může být u zkoušky použit jakožto příklad navíc. □

Tvrzení 17 (Jednoznačnost limity netu). *Topologický prostor je T_2 právě když každý net má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 18 (Urysohnovo lemma). *Topologický prostor X je normální, právě když pro každé dvě disjunktní uzavřené množiny E a F existuje spojitá funkce $f: X \rightarrow [0, 1]$, že $f(E) \subseteq \{0\}$ a $f(F) \subseteq \{1\}$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Důsledek 19. *Pokud je topologický prostor T_4 , pak je $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

konec 3. přednášky (14. 10. 2025)

Definice. Řekneme, že topologický prostor je *nuldimenzionální*, pokud existuje báze okolí sestávající z obojetných množin.

Příklady. • Sierpińského prostor (tj. prostor $X = \{0, 1\}$ s topologií $\tau = \{\emptyset, X, \{0\}\}$) je T_0 , ale není T_1 .

- Příkladem topologického prostoru, který je T_1 a není T_2 je nekonečná množina X s *ko-konečnou topologií*, tj. s topologií $\tau := \{\emptyset\} \cup \{A \subset X: X \setminus A \text{ je konečná}\}$.
- Příkladem topologického prostoru, který je T_2 a není T_3 je množina $S := (0, 1)^2 \cup \{(0, 0)\}$ s topologií generovanou bází okolí danou takto:
 - pro $x \in (0, 1)^2$ je $\mathcal{B}(x) := \{B_\rho(x, \varepsilon): \rho \text{ je Euklidovská metrika a } \varepsilon > 0\}$,
 - pro $x = (0, 0)$ je $\mathcal{B}(x) := \{[0, 1/2) \times [0, 1/n) \cap S: n \in \mathbb{N}\}$.
- Každý nuldimenzionální T_1 topologický prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 20 (Metrizovatelné prostory jsou normální). *Metrizovatelné prostory jsou T_4 .*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

2. Operace s topologickými prostory a zobrazeními

2.1. Projektivně a induktivně generované topologie

Definice. Ať X je množina a τ, σ dvě topologie na X . Řekneme, že τ je *větší* (*jemnější, silnější*) než σ , pokud $\tau \supseteq \sigma$. Topologie σ se tom případě nazývá *menší* (*hrubší, slabší*).

Diskrétní topologie je největší ze všech topologií, indiskrétní nejmenší.

Definice (Projektivní a induktivní vytváření). Ať X je množina, (X_i, τ_i) , $i \in I$ soubor topologických prostorů a $f_i: X \rightarrow X_i$, $i \in I$ je soubor zobrazení. Topologie τ na množině X se nazývá *projektivně vytvořená* zobrazeními f_i , pokud τ je nejmenší topologie při níž jsou všechna zobrazení $f_i: (X, \tau) \rightarrow (X_i, \tau_i)$ spojitá. Jsou-li $f_i: X_i \rightarrow X$, pak topologie τ na X se nazývá *induktivně vytvořená*, pokud τ je největší topologie, při níž jsou všechna zobrazení $f_i: (X_i, \tau_i) \rightarrow (X, \tau)$ spojitá.

Věta 21 (Existence a vlastnosti projektivně vytvořeného TP). *Ať X je množina, (X_i, τ_i) , $i \in I$ soubor topologických prostorů a $f_i: X \rightarrow X_i$, $i \in I$ je soubor zobrazení. Pak existuje právě jedna topologie τ projektivně vytvořená souborem zobrazení f_i , $i \in I$. Tato topologie má následující vlastnosti.*

- (P1) Subbáze topologie τ je $\{f_i^{-1}(U): U \in \tau_i\}$
- (P2) Kdykoliv (Y, σ) je topologický prostor a kdykoliv je dáno $g: Y \rightarrow X$, pak zobrazení g je spojité, právě když pro každé $i \in I$ je zobrazení $f_i \circ g$ spojité.
- (P3) Kdykoliv je dán net $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ v X a bod $x \in X$, pak $x_\alpha \rightarrow x$ v prostoru (X, τ) , právě když pro každé $i \in I$ platí $f_i(x_\alpha) \rightarrow f_i(x)$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Příklady. • Pokud je Y podprostor topologického prostoru X , pak topologie na Y je projektivně vytvořená z topologie na X s pomocí zobrazení identity $i: Y \rightarrow X$.

- $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ je vnoření právě když topologie τ je projektivně vytvořená zobrazením f .
- Necht X je topologický prostor. Pak symbolem $C_p(X)$ rozumíme topologický prostor $(C(X), \tau_p)$, kde $C(X) := \{f: X \rightarrow \mathbb{R}: f \text{ spojité}\}$ a τ_p je topologie projektivně vytvořená zobrazeními $\delta_x: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in X$ danými předpisem $\delta_x(f) := f(x)$. Pak pro každý net funkcí $(f_i)_{i \in I}$ z $C_p(X)$ a pro každé $f \in C_p(X)$ platí, že $f_i \rightarrow f$ právě když $f_i(x) \rightarrow f(x)$ pro každé $x \in X$. Říkáme, že τ_p je *topologie bodové konvergence*.

Věta 22 (Existence a vlastnosti induktivně vytvořeného TP). *Ať X je množina, (X_i, τ_i) , $i \in I$ soubor topologických prostorů a $f_i: X_i \rightarrow X$, $i \in I$ je soubor zobrazení. Pak existuje právě jedna topologie τ induktivně vytvořená souborem zobrazení f_i , $i \in I$. Tato topologie má následující vlastnosti.*

- (I1) $\tau = \{M \subset X: f_i^{-1}(M) \in \tau_i, i \in I\}$
- (I2) Kdykoliv (Y, σ) je topologický prostor a kdykoliv je dáno $g: X \rightarrow Y$, pak zobrazení g je spojité, právě když pro každé $i \in I$ je zobrazení $g \circ f_i$ spojité.

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. □

2.2. Součin

Definice. Jsou-li (X_i, τ_i) topologické prostory, pak jejich součin je topologický prostor (X, τ) , kde $X = \prod X_i$ a topologie τ je projektivně vytvořená projekcemi $\pi_i: X \rightarrow X_i$. Značí se $\prod_{i \in I} X_i$. Zobrazení $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ se pak nazývá *vnoření*, pokud f je prosté a topologie τ je projektivně vytvořená zobrazením f .

Poznámka. Báze $\mathcal{B}$ na součinu vypadá následovně:

$$\mathcal{B} = \{\pi_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_n) : i_1, \dots, i_n \in I, U_1 \in \tau_{i_1}, \dots, U_n \in \tau_{i_n}, n \in \mathbb{N}\},$$

přičemž uvedený průnik vzorů projekcí můžeme přepsat jako

$$\pi_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_n) = \left\{ x \in \prod X_i : x(i_1) \in U_1, \dots, x(i_n) \in U_n \right\}.$$

Konvergence netů v součinné topologie je přímočará: net $(x_j)_{j \in J}$ konverguje k x , právě když pro každé $i \in I$ konverguje net $(x_j(i))_{j \in J}$ k $x(i)$. Tedy součinná topologie odpovídá bodové konvergenci. Proto se součinná topologie někdy nazývá topologií bodové konvergence. Uzávěr množiny tvaru $\prod A_i$ je $\prod \bar{A}_i$.

konec 4. přednášky (20. 10. 2025)

Definice. Máme-li soubor zobrazení $f_i: X_i \rightarrow Y_i, i \in I$ definujeme *součin zobrazení* $\prod_I f_i: \prod_I X_i \rightarrow \prod_I Y_i$ rovností $\prod_I f_i(\{x_i\}_{i \in I}) = \{f_i(x_i)\}_{i \in I}$. Máme-li soubor zobrazení $f_i: X \rightarrow Y_i, i \in I$ definujeme *diagonální zobrazení* $\Delta_I f_i: X \rightarrow \prod_I Y_i$ rovností $\Delta_I f_i(x) = \{f_i(x)\}_{i \in I}$.

Tvrzení 23. *Nechť $Z, Y_i, i \in I$ a $X_i, i \in I$ jsou topologické prostory.*

- (i) *Zobrazení $f: Z \rightarrow \prod_I X_i$ je spojité, právě když jsou spojitá všechna složení f s projekcemi $\pi_i: \prod_I X_i \rightarrow X_i$.*
- (ii) *Jsou-li $f_i: Y_i \rightarrow X_i, i \in I$ spojitá zobrazení, je i jejich součin $\prod_I f_i: \prod_I Y_i \rightarrow \prod_I X_i$ spojitý.*
- (iii) *Jsou-li $f_i: Z \rightarrow X_i, i \in I$ spojitá zobrazení, je i jejich diagonální součin $\Delta_I f_i: Z \rightarrow \prod_I X_i$ spojitý.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Důsledek 24. *Je-li X topologický prostor a jsou-li $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá zobrazení, pak $f + g, f - g, f \cdot g, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}, |f|$ jsou spojitá. Pokud g je nenulové, pak také f/g je spojité.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 25 (Charakterizace Hausdorffova prostoru). *Topologický prostor X je Hausdorffův, právě když $\{(x, x) : x \in X\}$ je uzavřená v $X \times X$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

2.3. Suma, kvocient

Definice. Suma prostorů $X_i, i \in I$ je prostor $\biguplus_I X_i$ skládající se z bodů (i, x) , kde $i \in I, x \in X_i$. Pokud jsou všechny množiny X_i disjunktní, většinou se berou místo dvojic (i, x) rovnou body x .

Jsou-li $(X_i, \tau_i), i \in I$ topologické prostory, pak jejich *topologická suma* je topologický prostor $(\biguplus_I X_i, \tau)$, kde topologie τ je definována předpisem

$$\tau := \left\{ \biguplus_I O_i : O_i \subset X_i \text{ jsou otevřené} \right\}.$$

Topologickou sumu značíme jako $\bigoplus_I X_i$.

(Pozor: na značení topologické sumy není shoda, v různé literatuře se používají různé symboly. Značení použité výše je mírně nešikovné, neboť například v teorii Banachových prostorů symbolem $\bigoplus_I X_i$ značíme Banachův prostor, který je jakožto topologický prostor součinem X_i a ne topologickou sumou.)

Poznámka. Topologie na $X := \bigoplus_I X_i$ je induktivně generovaná kanonickými vnořeními $X_i \ni x \mapsto (i, x) \in \bigoplus_I X_i$.

Jsou-li X_i disjunktní, pak množina U v sumě topologických prostorů $\bigoplus_{i \in I} X_i$ je otevřená, právě když pro každé $i \in I$ je $U \cap X_i$ otevřená v X_i . Množiny X_i jsou obojetné v X . Jsou-li $f_i : X_i \rightarrow Y_i$, $i \in I$ spojitá zobrazení, pak $\bigoplus_I f_i : \bigoplus_I X_i \rightarrow \bigoplus_I Y_i$ je spojitě.

Definice. Je-li (X, τ) topologický prostor, $E \subseteq X \times X$ ekvivalenční relace, pak kvocientová topologie na X/E je induktivně definována zobrazením $x \mapsto [x]_E$.

Zobrazení $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ se nazývá kvocientové, pokud f je na a topologie σ je induktivně vytvořená zobrazením f .

Poznámka. Náznornější je opět přímý popis topologie kvocientu. Množina U v kvocientovém prostoru Y je otevřená, právě když $f^{-1}(U)$ je otevřená v X .

Je-li $f : X \rightarrow Y$ kvocientové zobrazení, pak na X lze přirozeným způsobem uvažovat ekvivalenci $\sim$, že $x \sim y$, právě když $f(x) = f(y)$. Pak $X/\sim$ je přirozeným způsobem homeomorfní s Y .

Příklady. • Definujeme-li na $\mathbb{R}$ ekvivalenci mezi xEy , právě když $\{x, y\} \in \mathbb{Q}$ nebo $\{x, y\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pak $\mathbb{R}/E$ je dvoubodový indiskrétní prostor. Speciálně, kvocient T_4 prostoru nemusí být ani T_0 .

- Definujeme-li na $\mathbb{R}$ ekvivalenci mezi xEy , právě když $x - y \in \mathbb{Z}$, pak kvocientový prostor $\mathbb{R}/E$ je homeomorfní kružnici.

Tvrzení 26 (Charakterizace kvocientového zobrazení). *Ať (X, τ) a (Y, σ) jsou topologické prostory a $f : X \rightarrow Y$ je zobrazení. Pak f je kvocientové, právě když f je na a pro každou $V \subseteq Y$ je $V \in \sigma \iff f^{-1}(V) \in \tau$.*

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. $\square$

Tvrzení 27 (Postačující podmínka kvocientového zobrazení). *Je-li zobrazení $f : X \rightarrow Y$ spojitě, otevřené (nebo uzavřené) a na, pak je kvocientové.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Poznámka. Věta o otevřeném zobrazení říká, že spojitě surjektivní lineární zobrazení mezi Banachovými prostory už je otevřené. Kvocientové zobrazení mezi topologickými prostory nemusí být ani otevřené ani uzavřené.

Poznámka. Spojitý obraz (a tedy i kvocient) separabilního prostoru je separabilní prostor.

Přehled zachovávání vlastností jednotlivými operacemi. Symbol (+) znamená zachovávání pojmu alespoň na spočetný součin nebo sumu.

	$T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}$	T_4	separabilní	spoč. báze	spoč. charakter	metr.
podprostor	+	-	-	+	+	+
(spočetná) suma	+	+	-(+)	-(+)	+	+
kvocient	-	-	+	-	-	-
(spočetný) součin	+	-	-(+)	-(+)	-(+)	-(+)

(Něco bylo/bude na přednášce, něco bylo/bude na cvičení ..)

2.4. Rozšiřování spojitých funkcí

Tvrzení 28. *Ať X, Y jsou topologické prostory a $f, g : X \rightarrow Y$ spojitá zobrazení. Pokud Y je Hausdorffův, pak $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ je uzavřená.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Důsledek 29 (Jednoznačnost spojitěho rozšíření). *Je-li tedy $f : X \rightarrow Y$ spojitě, Y Hausdorffův a $S \subseteq X$ hustá, pak funkce $f|_S$ má jediné spojitě rozšíření na celé X .*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 30. *Je-li X topologický prostor, $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité a posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně k f , pak f je spojitá.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

konec 5. přednášky (27. 10. 2025)

Věta 31 (Tietze-Urysohn). *Je-li X normální prostor a $F \subseteq X$ uzavřená, pak lze každou spojitou funkci $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ spojitě rozšířit na celé X , tedy existuje spojitá funkce $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$, že $\tilde{f}|_F = f$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

3. Kompaktnost

3.1. Kompaktní prostory

Definice. Systém množin $\mathcal{S}$ se nazývá *pokrytí* prostoru X , pokud $\bigcup \mathcal{S} = X$. Každý podsystém $\mathcal{S}$, který je pokrytí se nazývá *podpokrytí*. Pokrytí se nazývá *otevřené*, pokud jeho prvky jsou otevřené množiny. Topologický prostor se nazývá *kompaktní*, pokud z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí. Topologický prostor se nazývá *spočetně kompaktní*, pokud z každého spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí. Topologický prostor se nazývá *Lindelöfov*, pokud z každého otevřeného pokrytí lze vybrat spočetné podpokrytí.

Řekneme, že systém $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je *centrovaný*, pokud $F_1 \cap \dots \cap F_n \neq \emptyset$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$.

Definice. Nechť X je topologický prostor, $(I, \leq)$ shora usměrněná množina a $(x_i)_{i \in I}$ je net. Bod $x \in X$ se nazývá *hromadným bodem netu* $(x_i)_{i \in I}$, pokud pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$ a každé $i \in I$ existuje $j \geq i$, že $x_j \in U$.

Nechť dále $(J, \leq)$ je shora usměrněná množina. Pak řekneme, že zobrazení $\varphi : J \rightarrow I$ je *kofinální*, pokud pro každé $i_0 \in I$ existuje $j_0 \in J$ splňující $\varphi([j_0, \rightarrow]) \subset [i_0, \rightarrow)$ (tj. pro každé $j \in J$, $j_0 \leq j$ je $i_0 \leq \varphi(j)$). Pokud je dáno kofinální zobrazení $\varphi : J \rightarrow I$, pak řekneme, že $(x_{\varphi(j)})_{j \in J}$ je *podnet* netu $(x_i)_{i \in I}$.

Poznámka. Je-li dána posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ v prostoru X , pak podposloupnosti jsou speciálním případem podnetů. Existují ale i podnety, které nejsou podposloupnostmi. Například $(x_{F(t)})_{t \in \mathbb{R}}$, kde $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ je libovolné zobrazení splňující $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \infty$.

Je snadné si rozmyslet, že pokud net (x_i) konverguje k bodu x , pak každý podnet konverguje také k bodu x .

Věta 32 (Charakterizace kompaktnosti). *Pro topologický prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.*

- (a) X je kompaktní.
- (b) Každý centrovaný systém z uzavřených množin má neprázdný průnik.
- (c) Každý net v X má konvergentní podnet.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Lemma 33. *Nechť X je topologický prostor a $x \in X$. Pak x je hromadným bodem netu $(x_i)_{i \in I}$ právě tehdy, když existuje podnet netu $(x_i)_{i \in I}$, který k bodu x konverguje.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 34 (Charakterizace spočetné kompaktnosti). *Pro topologický prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.*

- (a) X je spočetně kompaktní.
- (b) Každý spočetný centrovaný systém z uzavřených množin má neprázdný průnik.
- (c) Každá posloupnost v X má konvergentní podnet.

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. □

Věta 35 (Charakterizace Lindelöfovosti). *Pro topologický prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.*

(a) X je Lindelöfův.

(b) Každý spočetně centrovaný systém z uzavřených množin má neprázdný průnik.

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. $\square$

Tvrzení 36 (Zachovávání vlastností). *Kompaktnost, spočetná kompaktnost i Lindelöfovost se dědí na uzavřené podprostory a spojité obrazy.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Důsledek 37 (Nabývání extrémů). *Spojité reálné funkce na (spočetně) kompaktním neprázdném prostoru nabývají svého maxima a minima.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Příklady. • Pokud $(X, \leq)$ je lineárně uspořádaný a každá (i prázdná) podmnožina $A \subset X$ má supremum a infimum, pak X s topologií generovanou uspořádáním je kompaktní prostor.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

- $[0, \alpha]$ je kompaktní prostor pro každý ordinál α .

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. $\square$

konec 6. přednášky (3. 11. 2025)

Lemma 38 (Alexander). *Ať X je topologický prostor a $\mathcal{S}$ jeho subbáze. Předpokládejme, že z každého pokrytí $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ lze vybrat konečné podpokrytí. Pak X je kompaktní.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Věta 39 (Tichonov). *Součin kompaktních topologických prostorů je kompaktní.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Poznámka. Tichonovova věta je v ZF ekvivalentní s AC. Tichonovova věta zúžená pouze na Hausdorffovy prostory je v ZF ekvivalentní s Boolean prime ideal theorem.

V dalších tvrzeních potřebujeme Hausdorffovskost kompaktních.

Tvrzení 40 (Kompakty jsou uzavřené v Hausdorffových prostorech). *Je-li X Hausdorffův topologický prostor a $K \subseteq X$ je kompaktní, pak K je uzavřená v X .*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Tvrzení 41 (Automatický homeomorfismus). *Ať X, Y jsou Hausdorffovy kompaktní topologické prostory a $f: X \rightarrow Y$ spojité. Je-li f na, pak f je kvocientové zobrazení. Je-li f bijekce, pak f je homeomorfismus.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Poznámka. Tedy kompaktní Hausdorffova topologie na dané množině je minimální Hausdorffova a maximální kompaktní.

Věta 42 (Postačující podmínka pro normalitu). *Regulární Lindelöfův topologický prostor je normální. Hausdorffův kompaktní prostor je T_4 .*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Tvrzení 43 (Spojitý obraz kompaktního nezvyšuje váhu). *Nechť X, Y jsou Hausdorffovy topologické prostory, X je kompaktní a $f: X \rightarrow Y$ je spojité a surjektivní zobrazení. Pak $w(Y) \leq w(X)$.*

3.2. Prostory spojitých funkcí na kompaktu

Pro dva topologické prostory X, Y označme symbolem $C(X, Y)$ množinu všech spojitých funkcí X do Y . V případě, že $Y = \mathbb{R}$, píšeme pouze $C(X)$. Pro kompaktní topologický prostor K tvoří $C(K)$ spolu se supremovou normou Banachův prostor, jehož některé vlastnosti jsou těsně provázány s topologickými vlastnostmi kompaktu K .

Tvrzení 44 (Diniho kritérium stejnoměrné konvergence). *Ať K je kompaktní topologický prostor, $f_n: K \rightarrow \mathbb{R}$ posloupnost spojitých funkcí, že $f_{n+1} \geq f_n$, které konvergují bodově ke spojitě funkci $f: K \rightarrow \mathbb{R}$. Pak (f_n) konverguje stejnoměrně k f .*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Lemma 45 (O odmocnině). *Existuje posloupnost polynomů, která stejnoměrně konverguje k funkci $\sqrt{t}$ na $[0, 1]$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

konec 7. přednášky (10. 11. 2025)

Definice. Řekneme, že systém funkcí $\mathcal{F}$ zobrazujících X do Y *odděluje body*, pokud pro různé body $x, y \in X$ existuje $f \in \mathcal{F}$, že $f(x) \neq f(y)$.

Okruh a svaz jsou pojmy algebraické povahy. Nebudeme zde připomínat jejich obecné definice. Pouze poznamenejme, že pro $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset C(K, \mathbb{F})$, kde $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, tvoří systém $\mathcal{A}$ okruh, pokud je $\mathcal{A}$ podprostor uzavřený na násobení. Systém $\mathcal{A}$ je samoadjungovaný, pokud $\bar{f} \in \mathcal{A}$, kdykoliv $f \in \mathcal{A}$. Systém $\mathcal{A} \subset C(K, \mathbb{R})$ je svaz, pokud je uzavřený na max a min dvou (resp. konečně mnoha) funkcí.

Věta 46 (Stoneova-Weierstrassova věta). *Ať K je kompaktní topologický prostor.*

- (a) *Nechť $\mathcal{B} \subset C(K, \mathbb{R})$ je vektorový podprostor obsahující konstanty a oddělující body. Je-li $\mathcal{B}$ okruh nebo svaz, pak $\mathcal{B}$ je hustý v $C(K, \mathbb{R})$.*
- (b) *Nechť $\mathcal{B} \subset C(K, \mathbb{C})$ je vektorový podprostor obsahující konstanty a oddělující body, který je navíc samoadjungovaný. Pokud $\mathcal{B}$ je okruh, je $\mathcal{B}$ hustý v $C(K, \mathbb{C})$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Důsledek 47. *Polynomy s racionálními koeficienty tvoří hustou podmnožinu prostoru $C([0, 1])$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 48. *Nechť K je Hausdorffův kompaktní. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (a) *K má spočetnou váhu.*
- (b) *Existuje spočetně mnoho funkcí $\mathcal{A} \subset C(K)$, které oddělují body K .*
- (c) *$C(K)$ je separabilní.*

Speciálně, pokud K je metrizable kompaktní, pak $C(K)$ je separabilní.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Poznámka. Později uvidíme, že Hausdorffův kompaktní má spočetnou váhu, právě když je metrizable.

3.3. Kompaktifikace

Definice. Ať X je topologický prostor. Dvojice (j, Y) se nazývá *kompaktifikací* prostoru X , pokud $j: X \rightarrow Y$ je vnoření X na hustou podmnožinu kompaktního Hausdorffova prostoru Y . Často se jako kompaktifikace označuje pouze samotný prostor Y a zobrazení j se chápe jako inkluze. Řekneme, že kompaktifikace (j_1, Y_1) je *větší* než kompaktifikace (j_2, Y_2) , pokud existuje spojitě zobrazení $f: Y_1 \rightarrow Y_2$, že $f \circ j_1 = j_2$. Kompaktifikace (j_1, Y_1) a (j_2, Y_2) prostoru X nazýváme *ekvivalentní*, pokud existuje homeomorfismus $h: Y_1 \rightarrow Y_2$, který rozšiřuje id_X (formálněji, rozšiřuje $i_2 \circ i_1^{-1}$).

Příklad. Uzavřený interval $Y_1 = [0, 1]$ je kompaktifikací otevřeného intervalu $X = (0, 1)$ přičemž $j_1: (0, 1) \rightarrow [0, 1]$ je vnoření. Kružnici Y_2 lze přirozeným způsobem chápat jako kompaktifikaci X . Formálně $j_2(x) = \exp(2\pi i x)$ a Y_2 je jednotková kružnice v komplexní rovině. Kompaktifikace (j_1, Y_1) je větší než kompaktifikace (j_2, Y_2) .

Poznámka. Kompaktifikace Hausdorffova kompaktního prostoru X je homeomorfní s X . Je-li jedna kompaktifikace větší než druhá a druhá větší než první, pak jsou již ekvivalentní.

Definice. Topologický prostor X se nazývá *lokálně kompaktní*, pokud každý bod má kompaktní okolí.

Tvrzení 49 (Alexandrova kompaktifikace). *Nechť (X, τ) je Hausdorffův lokálně kompaktní prostor, který není kompaktní a $\infty \notin X$. Na prostoru $X \cup \{\infty\}$ uvažujme topologii σ generovanou bází topologie*

$$\mathcal{B} := \tau \cup \{\{\infty\} \cup (X \setminus K) : K \subseteq X \text{ je kompaktní}\}.$$

Pak $(X \cup \{\infty\}, \sigma)$ je kompaktifikace prostoru X .

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

konec 8. přednášky (24. 11. 2025)

Příklady. • Každý kompaktní Hausdorffův prostor je lokálně kompaktní.

- Euklidovské prostory jsou lokálně kompaktní.
- Diskrétní prostor je lokálně kompaktní.
- Prostor $[0, \omega_1)$ je lokálně kompaktní.

Lemma 50. *Nechť X je Hausdorffův lokálně kompaktní prostor. Pak*

- (a) *každý bod $x \in X$ má bázi okolí sestávající z kompaktních množin,*
- (b) *pokud je $A \subset X$ otevřený nebo uzavřený podprostor, pak je A lokálně kompaktní,*
- (c) *X je otevřená množina v každé své kompaktifikaci.*

Navíc, Hausdorffův topologický prostor je lokálně kompaktní právě když je homeomorfní otevřené podmnožině nějakého Hausdorffova kompaktu.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Definice. Říkáme, že kompaktifikace (j, bX) prostoru X je *jednobodová*, jestliže $|bX \setminus X| = 1$.

Lemma 51. *Hausdorffův topologický prostor má jednobodovou kompaktifikaci právě když je lokálně kompaktní a není kompaktní. Ať dále X je lokálně kompaktní prostor, který není kompaktní. Pak jednobodová kompaktifikace X je určena jednoznačně, až na ekvivalenci kompaktifikací a jednobodová kompaktifikace je nejmenší kompaktifikace X .*

Důkaz. Důkaz je snadný, byl vynechán, může být u zkoušky použit jakožto příklad navíc. □

Definice. Necht X a Y jsou topologické prostory a $\mathcal{F}$ systém funkcí zobrazujících X do Y . Řekneme, že $\mathcal{F}$ *odděluje body a uzavřené množiny*, pokud pro každou uzavřenou $F \subseteq X$ a $x \in X \setminus F$ existuje $f \in \mathcal{F}$, že $f(x) \notin f(F)$.

Lemma 52 (Tichonovovo vnoření). *At X je topologický prostor a $\mathcal{F} = \{f_i: X \rightarrow Y_i, i \in I\}$ soubor spojitých zobrazení a uvažujme diagonální zobrazení $\Delta\mathcal{F} := \Delta_I f_i: X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$. Pokud $\mathcal{F}$ odděluje body, pak $\Delta\mathcal{F}$ je prosté. Pokud navíc $\mathcal{F}$ odděluje body a uzavřené množiny, pak $\Delta\mathcal{F}$ je vnoření.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 53 (Tichonovova krychle). *Necht X je $T_{3\frac{1}{2}}$ topologický prostor. Pak existuje množina I taková, že X se vnoří do $[0, 1]^I$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Důsledek 54. *Každý $T_{3\frac{1}{2}}$ topologický prostor má nějakou kompaktifikaci.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Definice. At X je $T_{3\frac{1}{2}}$ topologický prostor. Označme $\mathcal{F} := \mathcal{C}(X, [0, 1])$ a $\Delta\mathcal{F}: X \rightarrow [0, 1]^{\mathcal{F}}$ příslušné diagonální vnoření. Pak kompaktifikace $(\Delta\mathcal{F}, \overline{\Delta\mathcal{F}(X)})$ (nebo kterákoli s ní ekvivalentní) se nazývá *Čechova-Stoneova* (nebo beta obal) a značí se βX .

Věta 55 (Charakterizace beta obalu). *At X je $T_{3\frac{1}{2}}$ topologický prostor a (j, Y) kompaktifikace X . Pak jsou následující podmínky ekvivalentní.*

- (a) Y je Čechova-Stoneova kompaktifikace X .
- (b) Každou spojitou funkci $f: X \rightarrow [0, 1]$ lze spojitě rozšířit na celé Y , tj. existuje spojitá $\tilde{f}: Y \rightarrow [0, 1]$ splňující $\tilde{f} \circ j = f$.
- (c) Každou spojitou funkci $f: X \rightarrow Z$ do kompaktního Hausdorffova prostoru Z lze spojitě rozšířit na celé Y , tj. existuje spojitá $\tilde{f}: Y \rightarrow Z$ splňující $\tilde{f} \circ j = f$.
- (d) Y je největší kompaktifikace X .

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Poznámka. Každou spojitou omezenou funkci $T_{3\frac{1}{2}}$ prostoru X lze spojitě rozšířit na (omezenou) spojitou funkci $\beta X \rightarrow \mathbb{R}$. Tedy je možné ztotožnit Banachovy prostory ℓ_∞ a $C(\beta\mathbb{N})$.

Beta obal jednoduchých topologických prostorů může být velice komplikovaný. Příkladem je prostor $\beta\mathbb{N}$, který lze například popsat jako prostor všech ultrafiltrů na $\mathbb{N}$ s vhodnou topologií. Blíže viz. cvičení.

4. Metrizovatelnost a čechovská úplnost

4.1. Metrizovatelnost

Lemma 56. *Topologický prostor se spočetnou bází je Lindelöfov.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

konec 9. přednášky (1. 12. 2025)

Je-li (X, ρ) metrický prostor a $\sigma = \min\{\rho, 1\}$, pak σ je opět metrika na X , která navíc generuje stejnou topologii na X jako metrika ρ .

Tvrzení 57. *Spočetný součin metrických prostorů (X_n, ρ_n) , $n \in \mathbb{N}$ je metrizovatelný metrikou*

$$\rho(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\{\rho_n(x_n, y_n), 1\}}{2^n}, \quad x, y \in \prod X_n.$$

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 58 (Urysohnova metrizační věta). *Každý T_3 topologický prostor se spočetnou bází je metrizovatelný.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Poznámka. Z důkazu předchozí věty plyne, že každý separabilní metrizovatelný prostor má metrizovatelnou kompaktifikaci a lze ho vnořit do Hilbertovy kostky $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Důsledek 59. *Kompaktní Hausdorffův prostor je metrizovatelný právě když má spočetnou váhu.*

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. □

Důsledek 60. *Spojité obraz metrizovatelného kompaktu je metrizovatelný kompakt, pokud je obraz Hausdorffův.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

4.2. Úplnost v metrických prostorech

Připomeňme, že metrický prostor je *úplný*, pokud každá cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Nechť I je množina. Připomeňme, že na $\ell_{\infty}(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ omezená}\}$ definujeme metriku předpisem $\rho(f, g) := \|f - g\|_{\infty} = \sup_{i \in I} |f(i) - g(i)|$. Pak $(\ell_{\infty}(I), \rho)$ je úplný metrický prostor.

Věta 61 (Univerzalita $\ell_{\infty}(I)$). *Nechť (M, d) je metrický prostor, pak existuje izometrické vnoření $\varphi : M \rightarrow \ell_{\infty}(M)$.*

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. □

Důsledek 62 (O zúplnění). *Každý metrický prostor (X, ρ) má zúplnění, tj. existuje úplný metrický prostor (Y, σ) a izometrické vnoření $j : X \rightarrow Y$ splňující, že $j(X)$ je hustá v Y .*

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. □

Tvrzení 63. Každé stejnoměrně spojitě zobrazení z podprostoru A metrického prostoru (X, ρ) do úplného metrického prostoru (Y, σ) lze rozšířit na stejnoměrně spojitě zobrazení z $\bar{A}$ do Y .

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. $\square$

Důsledek 64 (Jednoznačnost zúplnění). *Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $(Y_1, \sigma_1), (Y_2, \sigma_2)$ úplné metrické prostory a $e_1: X \rightarrow Y_1, e_2: X \rightarrow Y_2$ dvě izometrická zobrazení splňující $\overline{e_1(X)}^{Y_1} = Y_1$ a $\overline{e_2(X)}^{Y_2} = Y_2$. Pak existuje izometrické surjektivní zobrazení $e: Y_1 \rightarrow Y_2$ splňující $e_2 = e \circ e_1$.*

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. $\square$

Závěrem zopakujeme dvě známá tvrzení z Matematické analýzy o úplných metrických prostorech.

Věta 65 (Cantor). *Metrický prostor (X, ρ) je úplný, právě když pro každou posloupnost (F_n) neprázdných uzavřených podmnožin X splňující $F_n \subset F_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } F_n = 0$ je $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ jednobodová množina.*

Věta 66 (Baireova věta). *V úplném metrickém prostoru je průnik spočetně mnoha hustých otevřených množin opět hustá množina.*

Definice. Řekneme, že topologický prostor je *Baireův* pokud je průnik spočetně mnoha hustých otevřených množin opět hustá množina.

4.3. Úplná metrizovatelnost

Definice. Topologický prostor se nazývá *úplně metrizovatelný*, pokud na něm existuje úplná metrika generující jeho topologii.

Tvrzení 67. *Spočetný součin úplně metrizovatelných prostorů je úplně metrizovatelný.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Věta 68 (Úplně metrizovatelné prostory). *Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

- (i) X je G_δ -podmnožinou nějakého svého zúplnění.
- (ii) X je G_δ -podmnožinou každého svého zúplnění.
- (iii) Kdykoliv se X vnoří do úplného metrického prostoru, pak se tam vnoří jakožto G_δ -podmnožina.
- (iv) Prostor X je úplně metrizovatelný.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

konec 10. přednášky (8. 12. 2025)

Definice. Tichonovův prostor X se nazývá *čechovsky úplný*, pokud je G_δ v βX .

Lemma 69 (O přírůstku kompaktifikací). *Jsou-li (j_1, Y_1) a (j_2, Y_2) kompaktifikace topologického prostoru X a $f: Y_1 \rightarrow Y_2$ splňuje $f \circ j_1 = j_2$, pak $f(Y_1 \setminus j_1(X)) = Y_2 \setminus j_2(X)$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Tvrzení 70 (Charakterizace čechovsky úplných prostorů). *Pro Tichonovův prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.*

- (a) X je čechovsky úplný.

(b) X je G_δ v každé kompaktifikaci.

(c) X je G_δ v nějaké kompaktifikaci.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Poznámka. V předchozí větě nelze ekvivalentně říci G_δ v každém kompaktu. Například prostor $[0, 1]^{\omega_1}$ není G_δ v $[0, 2]^{\omega_1}$.

(Důkaz bude na cvičení.)

Věta 71 (Frolíkova vnitřní charakterizace čechovské úplnosti). *Nechť X je Tichonovův topologický prostor. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní.*

(i) X je čechovsky úplný.

(ii) *Existuje posloupnost otevřených pokrytí $\{\mathcal{U}_n\}$ prostoru X s vlastností, že pro každý centrováný systém uzavřených množin $\mathcal{F}$ takový, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $F \in \mathcal{F}$ a $U \in \mathcal{U}_n$, že $F \subset U$, je $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Důsledek 72 (Čech). *Metrizovatelný prostor X je úplně metrizovatelný, právě když je čechovsky úplný.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

konec 11. přednášky (15. 12. 2025)

Příklady. • Každý lokálně kompaktní Hausdorffův prostor je čechovsky úplný.

• Prostor iracionálních čísel je čechovsky úplný, prostor racionálních čísel není čechovsky úplný.

Věta 73 (Baireova věta v čechovsky úplných prostorech). *Každý čechovsky úplný prostor je Baireův.*

Tvrzení 74 (Zachovávání čechovské úplnosti operacemi). *Čechovská úplnost se zachovává sumou, spočetným součinem a uzavřeným podprostorem.*

Věta 75. *Součin libovolně mnoha čechovsky úplných prostorů je Baireův.*

Poznámka. Čechovská úplnost se nezachovává na libovolné součiny a existují tak prostory, které jsou Baireovy a nejsou čechovsky úplné. Příslušný příklad bude na cvičení.

5. Topologické grupy

Tato část sylabu se nestihla přednést. Pro přehled je možné se podívat do připravovaných skript. Podrobněji tato látka bude přednesena v kurzu Obecná topologie 2.