I. Banachovy a Hilbertovy prostory

1. Základní vlastnosti

$\mathbb{K}$ je $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

Definice 1. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkci $\|\cdot\|\colon X \to [0, \infty)$ nazýváme *normou* na X, pokud

(i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$,

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme *normovaným lineárním prostorem.*

Tvrzení 2. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$.*

(a) Funkce $\rho(x, y) = \|x - y\|$ pro $x, y \in X$ je translačně invariantní metrika na X.

(b) Norma je 1-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na X.

(c) Zobrazení $+\colon X \times X \to X$ a $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$ jsou spojitá.

Důkaz. Důkaz části (c) byl předveden na přednášce a bude zkoušen. □

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0, 1)$ se nazývá jednotková koule v X.
- Množina $U_X = U_X(0, 1)$ se nazývá otevřená jednotková koule v X.
- Množina $S_X = \{x \in X;\ \|x\| = 1\}$ se nazývá jednotková sféra.

Definice 3. *Banachův prostor* je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Tvrzení 4. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.*

(a) Je-li Y Banachův, pak Y je uzavřený v X.

(b) Je-li X Banachův, pak Y je Banachův, právě když Y je uzavřený v X.

Příklad 5. Příklady Banachových prostorů ($p \in [1, \infty]$):

$$(\mathbb{K}, \|\cdot\|_p);\ L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K});\ \ell_p;\ C(K);\ c_0;\ c_{00} \text{ (je normovaný lineární, není Banachův).}$$

Definice 6 (ekvivalentní normy)**.** Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou *ekvivalentní*, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Tvrzení 7. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X, \|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X, \|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.

(ii) Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.

(iii) Zobrazení Id: $(X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je homeomorfismus.

(iv) Otevřené množiny v $(X, \|\cdot\|_1)$ splývají s otevřenými množinami v $(X, \|\cdot\|_2)$.

(v) $\|x_n - x\|_1 \to 0$, právě když $\|x_n - x\|_2 \to 0$ pro $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a bude zkoušen. □

Konec 1. přednášky

Definice 8. Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je *konvexní*, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Nechť $x_1, \dots, x_n \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je *konvexní kombinací* vektorů $x_1, \dots, x_n$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, jestliže $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ a platí, že $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Fakt 9. *Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny.*

Definice 10. Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. *Konvexním obalem* M nazveme množinu $\operatorname{conv} M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Tvrzení 11. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak*

$$\operatorname{conv} M = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Důkaz. Důkaz byl na přednášce vynechán, ale není složitý. Může být použit u zkoušky jako teoretický příklad. □

Definice 12. Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Definice 13. Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme *uzavřený lineární obal* M jako $\overline{\operatorname{span}}\, M = \bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$ a *uzavřený konvexní obal* M jako $\overline{\operatorname{conv}}\, M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Fakt 14. *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak $\overline{Y}$ je podprostor X a $\overline{C}$ je konvexní množina.*

Důkaz. Důkaz byl na přednášce vynechán, ale není složitý. Může být použit u zkoušky jako teoretický příklad. □

Tvrzení 15. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\operatorname{span}}\, M = \overline{\operatorname{span} M}$ a $\overline{\operatorname{conv}}\, M = \overline{\operatorname{conv} M}$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 16. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\operatorname{span}(Y \cup Z)$ je uzavřený.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Důsledek 17. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

2. Lineární operátory a funkcionály

Připomeňme si, že zobrazení $T\colon X \to Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineární*, pokud $T(x+y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Fakt 18. *Nechť X, Y jsou vektorové prostory, $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení a $M \subset X$. Pak $T(-M) = -T(M)$ a $T(\operatorname{conv} M) = \operatorname{conv} T(M)$. Speciálně, je-li M symetrická, pak $T(M)$ je symetrická, a je-li M konvexní, pak $T(M)$ je konvexní.*

Důkaz. Důkaz byl na přednášce vynechán, ale není složitý. Může být použit u zkoušky jako teoretický příklad. □

Tvrzení 19. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T *je spojité.*

(ii) T *je spojité v* 0.

(iii) Existuje $C \geq 0$ tak, že $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X$.

(iv) $T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.

(v) $T(B_X)$ je omezená.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Lemma 20. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

(a) $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ *pro každé* $x \in X$.

(b) $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|$.

(c) $\|T\| = \inf\{C \geq 0;\ \|T(x)\| \leq C\|x\| \text{ pro každé } x \in X\}$.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Fakt 21. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ je posloupnost operátorů konvergujících k $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ v prostoru $\mathcal{L}(X,Y)$. Pak $\{T_n\}$ konverguje k T bodově, tj. pro každé $x \in X$ platí $T_n(x) \to T(x)$ v prostoru Y.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Fakt 22. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory, $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Pak $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Konec 2. přednášky

Věta 23. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X,Y)$ je Banachův prostor.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Definice 24. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej *duálním prostorem* k prostoru X.

Věta 25. *Je-li X normovaný lineární prostor, je prostor X^* úplný.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Definice 26. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Říkáme, že T je

- *izomorfismus* X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen *izomorfismus do*), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$;
- *izometrie* X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;
- izometrie X do Y (nebo jen *izometrie do*), pokud $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$.

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- *izomorfní*, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- *izometrické*, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

- *izomorfně vnořen* do Y, pokud existuje lineární izomorfismus X do Y;
- *izometricky vnořen* do Y, pokud existuje lineární izometrie X do Y.

Poznámka 27. Uvědomme si, že lineární zobrazení $T\colon X \to Y$ je izometrie do, právě když $\|T(z)\| = \|z\|$ pro každé $z \in X$.

Tvrzení 28. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.*

(a) *$T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ pro každé $x \in X$.*

(b) *Je-li X izomorfní s Y a X je Banachův, je i Y Banachův.*

(c) *Je-li X Banachův a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je izomorfismus do, pak $\operatorname{Rng} T$ je uzavřený v Y.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Fakt 29. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$.*

(a) *Jsou-li S, T izomorfismy do, pak $S \circ T$ je izomorfismus do.*

(b) *Jsou-li S, T izometrie do, pak $S \circ T$ je izometrie do.*

Důkaz. Důkaz byl na přednášce vynechán, ale není složitý. Může být použit u zkoušky jako teoretický příklad. □

Věta 30. *Nechť $X, \widehat{X}$ a Y jsou normované lineární prostory, X je hustý v $\widehat{X}$ a Y je úplný. Nechť dále $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak existuje právě jeden operátor $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X},Y)$ rozšiřující T, tj. $\widehat{T}\restriction_X = T$. Navíc platí $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.*

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

3. Řady v normovaných lineárních prostorech

Definice 31. Nechť $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konverguje* k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Řada je *absolutně konvergentní*, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Fakt 32. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní řada v X. Pak*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 33 (Test úplnosti)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

4. Konečněrozměrné prostory

Konec 3. přednášky

Lemma 34 (o skoro kolmici, Frigyes Riesz (1918))**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li Y vlastní uzavřený podprostor X, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takové, že $\operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 35. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\dim X < \infty$.

(ii) Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.

(iii) B_X je kompaktní.

(iv) Každé lineární zobrazení z X do nějakého normovaného lineárního prostoru je spojité.

(v) Každá lineární forma na X je spojitá.

(vi) Každé dvě normy na X jsou ekvivalentní.

Důkaz. Důkaz ekvivalence prvních tří podmínek byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

5. Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

Jsou-li $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $1 \leq p \leq \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x,y)\|_p = \begin{cases} \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$.

Definice 36. Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Pak prostorem $X \oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem (1).

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Pro $x \in X$ pak definujeme $\widehat{x}$ jako třídu ekvivalence obsahující x, tedy

$$\widehat{x} = \{y \in X;\ y \sim x\} = \{y \in X;\ y - x \in Y\} = x + Y.$$

Na množině

$$X/Y = \{\widehat{x};\ x \in X\}$$

definujeme operace $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x+y}$ a $\alpha\widehat{x} = \widehat{\alpha x}$ pro $\widehat{x}, \widehat{y} \in X/Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definice 37. Nechť X je vektorový prostor a Y je jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme *faktorprostorem* prostoru X podle Y nebo též *kvocientem* X podle Y. Dále definujeme tzv. *kanonické kvocientové zobrazení* $q\colon X \to X/Y$ předpisem $q(x) = \widehat{x}$.

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ je normovaný lineární prostor s normou

$$\begin{aligned} \|\widehat{x}\|_{X/Y} = \inf_{y \in \widehat{x}} \|y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \\ = \operatorname{dist}(x + Y, 0) = \operatorname{dist}(x, Y), \end{aligned}$$

Tato norma se nazývá *kanonická kvocientová norma*.

Tvrzení 38. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje $q(U_X) = U_{X/Y}$. Je-li Y vlastní, pak $\|q\| = 1$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 39. *Nechť X je Banachův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak X/Y je též Banachův prostor.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Definice 40. Nechť X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je *direktním (též algebraickým) součtem* A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{0\}$ a $X = A + B = \operatorname{span}(A \cup B)$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus B = X$ se nazývá *algebraický doplněk* A v X.

Definice 41. Nechť X je vektorový prostor. Lineární zobrazení $P\colon X \to X$ se nazývá *(lineární) projekce*, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

Tvrzení 42. *Nechť X je vektorový prostor. Jsou-li P_A, P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = Id_X$, $\operatorname{Rng} P_A = A$, $\operatorname{Ker} P_A = B$, $\operatorname{Rng} P_B = B$ a $\operatorname{Ker} P_B = A$. Na druhou stranu, je-li P lineární projekce v X, pak $X = A \oplus B$, kde $A = \operatorname{Rng} P$, $B = \operatorname{Ker} P$ a $P = P_A$.*

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Věta 43. *Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.*

(a) Prostor Y má algebraický doplněk v X.

(b) Je-li A algebraický doplněk Y v X, je A algebraicky izomorfní s X/Y; speciálně $\dim(A) = \dim(X/Y)$.

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Definice 44. Je-li X vektorový prostor a Y jeho podprostor, pak *kodimenzí* Y (značíme $\operatorname{codim} Y$) rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku Y (což je rovno dimenzi X/Y).

Konec 4. přednášky

Definice 45. Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je *topologickým součtem* A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_{\mathrm{t}} B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_{\mathrm{t}} B = X$ se nazývá *topologický doplněk* A v X. Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je *komplementovaný* (v X).

Věta 46. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y, Z jsou jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$, právě když zobrazení $T\colon X \to Y \oplus_1 Z$, $T(x) = \big(P_Y(x), P_Z(x)\big)$ je izomorfismus.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 47. *Nechť X je Banachův prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$, právě když Y a Z jsou uzavřené.*

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

6. Hilbertovy prostory

Definice 48. *Skalárním součinem* na vektorovém prostoru X nad $\mathbb{K}$ rozumíme funkci $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X\times X\to\mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) funkce $x\mapsto\langle x,y\rangle$ je lineární pro každé $y\in X$,

(ii) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$ pro každé $x,y\in X$,

(iii) $\langle x,x\rangle\geq 0$ pro každé $x\in X$,

(iv) $\langle x,x\rangle=0$ právě tehdy, když $x=0$.

Dvojici $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazýváme *prostor se skalárním součinem.*

Tvrzení 49 (Cauchyova-Schwarzova nerovnost)**.** *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak*

(i) $|\langle x,y\rangle|\leq\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$ pro každé $x,y\in X$.

(ii) Funkce $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ pro $x\in X$ je norma na X.

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Fakt 50. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x,y\in X$. Pak*

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle.$$

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Tvrzení 51 (rovnoběžníkové pravidlo)**.** *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x,y\in X$ platí*

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\big(\|x\|^2+\|y\|^2\big).$$

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Definice 52. Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x,y\in X$ se nazývají *ortogonální* (na sebe *kolmé*), pokud $\langle x,y\rangle=0$. Tento fakt značíme též $x\perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A\subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x\perp A$. Množiny $A,B\subset X$ jsou ortogonální, pokud $x\perp y$ pro každé $x\in A$, $y\in B$, což značíme $A\perp B$. Množina $A^\perp=\{x\in X;\ x\perp A\}$ se nazývá *ortogonální doplněk* A.

Fakt 53 (Pythagorova věta, asi 500 p.n.l.)**.** *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x,y\in X$. Je-li $x\perp y$, pak*

$$\|x\pm y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

Obecněji, jsou-li $x_1,\dots,x_n\in X$ navzájem ortogonální, pak

$$\|x_1+\ldots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\cdots+\|x_n\|^2.$$

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Tvrzení 54. *Nechť $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Pak funkce $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X\times X\to\mathbb{K}$ je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Lemma 55. *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Jsou-li $x,z\in X$ takové, že $\langle x,y\rangle=\langle z,y\rangle$ pro každé $y\in X$, pak $x=z$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Tvrzení 56. *Nechť X je prostor se skalárním součinem.*

(i) Je-li Y podprostor X, pak $Y^\perp\cap Y=\{0\}$.

(ii) $\{0\}^\perp=X$ a $X^\perp=\{0\}$.

(iii) Pro $A\subset X$ je $A^\perp=(\overline{\operatorname{span}}A)^\perp$.

(iv) Pro $A\subset X$ je $A^\perp$ uzavřený podprostor.

(v) Je–li $X=Y+Z$ pro nějaké podprostory $Y,Z\subset X$ takové, že $Y\perp Z$, pak $Z=Y^\perp$, $Y=Z^\perp$ a $X=Y\oplus Z$.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce vynechán, ale není složitý. Může být použit u zkoušky jako teoretický příklad. □

Tvrzení 57 (polarizační vzorec)**.** *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$

v reálném případě, resp.

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big)$$

v komplexním případě.

Důkaz. Důkaz reálného případu byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Důsledek 58. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T\colon X \to Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in X$.*

Důkaz. Důkaz reálného případu byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Definice 59. Prostor se skalárním součinem $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se nazývá *Hilbertův prostor*, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Věta 60 (Frigyes Riesz, 1934)**.** *Nechť C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x-y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Lemma 61 (F. Riesz, 1934)**.** *Nechť X je prostor se skalárním součinem, Y je jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x-y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$ právě tehdy, když $x - y \in Y^\perp$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Konec 5. přednášky

Definice 62. Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P : X \to X$ je projekce. Pokud $x - Px \perp \operatorname{Rng} P$ pro každé $x \in X$, pak P se nazývá ortogonální projekce.

Věta 63. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P : X \to X$ je lineární projekce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) *P je ortogonální projekce.*

(ii) $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Rng} P)^\perp$ *a* $\operatorname{Rng} P = (\operatorname{Ker} P)^\perp$.

(iii) $\|x - Px\| = \operatorname{dist}(x, \operatorname{Rng} P)$ *pro každé $x \in X$.*

(iv) *P je spojitá a $\|P\| \le 1$ (tj. $P = 0$, nebo $\|P\| = 1$).*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 64. *Nechť H je Hilbertův prostor a $Y \subset H$ uzavřený podprostor. Pak $H = Y \oplus_t Y^\perp$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Definice 65. Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- *ortogonální*, pokud $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;
- *ortonormální*, pokud A je ortogonální a $A \subset S_X$;
- *maximální ortonormální*, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A;
- *úplná ortonormální*, pokud A je ortonormální a $\overline{\operatorname{span}}\, A = X$;
- *ortonormální báze*, pokud $A = \{e_i;\ i \in N\}$ je ortonormální množina (kde $N \in \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$) a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i$ pro nějaké skaláry x_i (kde $\sum_{i=1}^{\mathbb{N}} x_i e_i$ značí $\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$).

Věta 66 (Besselova nerovnost)**.** *Je-li $N \in \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$ a $\{e_i\}_{i \in N}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, platí $\sum_{i=1}^{N} |\langle x, e_i\rangle|^2 \le \|x\|^2$ pro každé $x \in X$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 67. *Nechť H je Hilbertův prostor, $N \in \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$ a $\{e_i\}_{i=1}^{N}$ je ortonormální systém v H. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{N} |\langle x, e_i\rangle|^2$ *pro každé $x \in H$ (tzv. Parsevalova rovnost).*

(ii) $x = \sum_{i=1}^{N} \langle x, e_i\rangle e_i$ *pro každé* $x \in H$.

(iii) $\{e_i\}$ *je ortonormální báze.*

(iv) $H = \overline{\operatorname{span}}\{e_i;\ i \in \mathbb{N}\}$.

(v) $\{e_i\}$ *je maximální ortonormální systém.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Důsledek 68. *Každý separabilní Hilbertův prostor má ortonormální bázi.*

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Věta 69. *Každý separabilní nekonečně-dimenzionální Hilbertův prostor je izometrický prostoru* ℓ_2.

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Věta 70 (vyjádření ortogonální projekce)**.** *Nechť* H *je Hilbertův prostor a* Y *jeho uzavřený podprostor. Nechť* $N \in \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$ *a* $(e_j)_{j\in N}$ *je nějaká ortonormální báze prostoru* Y. *Pak projekci na* Y *podél* $Y^\perp$ *(tzv. ortogonální projekci) lze vyjádřit vzorcem*

$$Px = \sum_{j=1}^{N} \langle x, e_i\rangle e_i, \quad x \in H.$$

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Konec 6. přednášky

Věta 71 (Heinrich Löwig (1934), F. Riesz (1934))**.** *Nechť* H *je Hilbertův prostor. Pro každé* $y \in H$ *označme* $f_y \in H^*$ *funkcionál definovaný jako* $f_y(x) = \langle x, y\rangle$ *pro* $x \in H$. *Pak zobrazení* $I\colon H \to H^*$, $I(y) = f_y$ *je sdruženě lineární izometrie* H *na* H^*.

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

II. Hahnova-Banachova věta a dualita

1. Duální a adjungované operátory - základy

Definice 72. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Operátor $T^*\colon Y^* \to X^*$ definovaný předpisem

$$T^* f(x) = f(Tx)$$

pro $f \in Y^*$ a $x \in X$ se nazývá *duální* (nebo též *adjungovaný*) operátor k T. (Ve Větě 73 dokážeme, že T^* je dobře definovaný.) Operátor $(T^*)^*$ (tj. operátor duální k T^*) značíme T^{**}.

Věta 73. *Nechť* X, Y, Z *jsou normované lineární prostory.*

(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, *je* $T^* f \in X^*$ *pro každé* $f \in Y^*$. *Dále* $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ *a* $\|T^*\| \leq \|T\|$.

(b) Zobrazení $T \mapsto T^*$ *je lineární zobrazení z* $\mathcal{L}(X, Y)$ *do* $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

(c) Nechť $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *a* $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. *Pak* $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. *Dále* $Id_X^* = Id_{X^*}$.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 74. *Nechť* H_1, H_2 *jsou Hilbertovy prostory a* $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. *Pak existuje jednoznačně určený operátor* $T^\star \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ *takový, že pro každé* $y \in H_2$ *a* $x \in H_1$ *platí*

$$\langle Tx, y\rangle_{H_2} = \langle x, T^\star y\rangle_{H_1}.$$

Dále platí, že $T^\star = I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$, *kde* $I_j\colon H_j \to H_j^*$, $j = 1, 2$ *jsou příslušné sdruženě lineární izometrie z Věty 71.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Definice 75. Operátor $T^\star$ z předcházející věty nazýváme hilbertovsky adjungovaným operátorem k T.

Věta 76. *Nechť* H_1, H_2, H_3 *jsou Hilbertovy prostory.*

(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, *je* $T^{\star\star} = (T^\star)^\star = T$.

(b) Zobrazení $T \mapsto T^\star$ *je sdruženě lineární bijekce* $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ *na* $\mathcal{L}(H_2, H_1)$.

(c) Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ *a* $S \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$. *Pak* $(S \circ T)^\star = T^\star \circ S^\star$. *Dále* $(Id_{H_1})^\star = Id_{H_1}$.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

2. Reprezentace duálů

Definice 77. Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, nebo $p = \infty$. Číslo $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$, nebo $q = \infty$ nazýváme *sdruženým exponentem* k p, pokud platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, přičemž používáme konvenci, že $\frac{1}{\infty} = 0$.

Konec 7. přednášky

Věta 78 (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům)**.** *(a) Prostor c_0^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_1 pomocí zobrazení $I\colon \ell_1 \to c_0^*$, $I(y) = f_y$, kde*

$$f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

(b) Je-li $1 \leq p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor ℓ_p^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_q pomocí zobrazení $I\colon \ell_q \to \ell_p^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

(c) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $1 < p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I\colon L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu.$$

(d) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor se σ-konečnou mírou, pak prostor $L_1(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_\infty(\mu)$ pomocí zobrazení $I\colon L_\infty(\mu) \to L_1(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Dokázáné časti na přednášce, které mohou být zkoušeny: (a), (c) a (d) pro případ prostoru s konečnou mírou. □

Věta 79 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$)**.** *Je-li K kompaktní metrický prostor, pak prostor $C(K)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $M(K)$ všech borelovských $\mathbb{K}$-hodnotových měr na K pomocí zobrazení $I\colon M(K) \to C(K)^*$, $I(\mu) = \varphi_\mu$, kde*

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

3. Hahnova-Banachova věta

Definice 80. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkce $p\colon X \to \mathbb{R}$ se nazývá *sublineární funkcionál*, pokud platí

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0, +\infty)$.

Funkce $p\colon X \to [0, +\infty)$ se nazývá *pseudonorma*, pokud platí

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Věta 81 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929))**.** *Nechť X je vektorový prostor a Y je podprostor X.*

(a) Je-li X reálný, p je sublineární funkcionál na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $F(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.

(b) Je-li p pseudonorma na X a f je lineární forma na Y splňující $|f(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $|F(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.

Důkaz. Důkaz části (a) byl vynechán, důkaz (b) byl na přednášce předveden a může být zkoušen. □

Konec 8. přednášky

Věta 82 (Hahnova-Banachova)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F\restriction_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. ☐

Důsledek 83. *Nechť X je netriviální normovaný lineární prostor. Pak pro každé $x \in X$ platí*

$$\|x\| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|.$$

Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. ☐

Důsledek 84. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Pak zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X, Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. ☐

Důsledek 85. *Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory. Pak zobrazení $T \mapsto T^\star$ je sdruženě lineární izometrie $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ na $\mathcal{L}(H_2, H_1)$.*

Důkaz. Důkaz byl na přednášce vynechán, ale není složitý. Může být použit u zkoušky jako teoretický příklad. ☐

Věta 86 (Oddělování bodu a podprostoru)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je uzavřený podprostor X a $x \notin Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f\restriction_Y = 0$ a $f(x) = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. ☐

III. Omezené operátory v Banachových prostorech

1. Kompaktní operátory

Definice 87. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá *kompaktní operátor*, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y. Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Lineární operátor T se nazývá *konečněrozměrný*, pokud $\operatorname{Rng} T$ má konečnou dimenzi. Množinu všech konečněrozměrných spojitých lineárních operátorů z X do Y označíme jako $\mathcal{F}(X, Y)$.

Tvrzení 88. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Každý kompaktní lineární operátor z X do Y je automaticky spojitý. Dále, je-li $T\colon X \to Y$ lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je kompaktní.

(ii) $T(B_X)$ je relativně kompaktní.

(iii) Je-li $\{x_n\}$ omezená posloupnost v X, pak posloupnost $\{T(x_n)\}$ má konvergentní podposloupnost.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. ☐

Věta 89. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.*

(a) $\mathcal{K}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.

(b) $\mathcal{K}(X, Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$.

(c) Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem zleva či zprava, dostaneme opět kompaktní operátor.

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. ☐

Věta 90 (Arzela-Ascoli)**.** *Nechť (K, d) je kompaktní metrický prostor a $F \subset C(K)$. Pak F je relativně kompaktní v $C(K)$, právě když je omezená a stejně stejnoměrně spojitá (tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ splňující, že kdykoliv $f \in F$ a $d(x, y) < \delta$ pak $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$).*

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. ☐

2. Druhý duál a reflexivita

Definice 91. Nechť X je normovaný lineární prostor. Symbolem X^{**} značíme $(X^*)^*$, tj. duál k prostoru X^*. Tento prostor nazýváme *druhým duálem*.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. *evaluační funkcionál* $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$.

Definice 92. Nechť X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá *kanonické vnoření X do X^{**}*.

Tvrzení 93. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je lineární izometrie do. Je-li tedy X navíc Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený podprostor X^{**}*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Konec 9. přednášky

Tvrzení 94 (J. P. Schauder, 1930)**.** *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $\varepsilon_X : X \to X^{**}$ a $\varepsilon_Y : Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření do druhých duálů a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak*

$$T^{**} \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T.$$

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 95 (J. P. Schauder, 1930)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak T^* je kompaktní, právě když T je kompaktní.*

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Věta 96. *Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li X_1, X_2 dvě zúplnění X, pak existuje lineární izometrie X_1 na X_2, která je na X identitou.*

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Věta 97. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

(a) T je izomorfismus na, právě když T^* je izomorfismus na. V tomto případě navíc platí $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(b) T je izometrie na, právě když T^* je izometrie na.

Důkaz. Část (a) byla na přednášce dokázána a může být zkoušena. □

Definice 98. Banachův prostor X se nazývá *reflexivní*, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

Věta 99. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.*

(a) Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.

(b) Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.

(c) Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.

(d) Je-li X reflexivní a Y jeho uzavřený podprostor, pak je X/Y reflexivní.

Důkaz. Část (a) byla na přednášce dokázána a může být zkoušena. □

Příklady 100.

(a) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

(b) Každý Hilbertův prostor je relexivní.

(c) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.

(d) Prostory c_0, ℓ_1, ℓ_∞, $L_1([0,1])$, $L_\infty([0,1])$ a $C([0,1])$ nejsou reflexivní.

(e) Existuje Banachův prostor J (tzv. Jamesův prostor), který není reflexivní, i když je izometrický s J^{**}.

Věta 101 (James)**.** *Banachův prostor X je reflexivní, právě když pro každé $x^* \in X^*$ existuje $x \in B_X$ splňující $\|x^*\| = x^*(x)$.*

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

3. Úplnost v Banachových prostorech

Věta 102 (Princip stejnoměrné omezenosti)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) Pro každé $x \in X$ je $\sup\{\|T(x)\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Důsledek 103. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{L}(X,Y)$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Pak $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $\|T\| \leq \liminf \|T_n\| \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Definice 104. Zobrazení $f\colon X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá *otevřené*, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Věta 105 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.*

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Důsledek 106 (S. Banach, 1929)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y, právě když T je prostý a na.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Důsledek 107. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je na. Pak prostor Y je izomorfní s $X/\operatorname{Ker} T$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Definice 108. Je-li $f\colon X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x,y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme *grafem zobrazení* f. Říkáme, že zobrazení $f\colon X \to Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, *má uzavřený graf*, pokud množina $\operatorname{graf} f$ je uzavřená v $X \times Y$.

Věta 109 (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T je spojité, právě když má uzavřený graf.*

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Konec 10. přednášky

4. Spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů

Tvrzení 110. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak T je invertibilní, právě když T je bijekce.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Tvrzení 111. *Nechť X je Banachův prostor.*

(a) Pokud $T \in \mathcal{L}(X)$ a $\|T\| < 1$, pak $Id_X - T$ je inveribilní a platí $(Id_X - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.

(b) Pokud je T invertovatelný a $\|S - T\| < \frac{1}{\|T\|^{-1}}$, pak S je invertovatelný. Speciálně, množina všech invertibilních operátorů v $\mathcal{L}(X)$ je otevřená.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Definice 112. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme *vlastním číslem* operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme *vlastním prostorem* příslušným číslu λ. Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají *vlastní vektory* příslušné číslu λ. Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá *bodové spektrum* operátoru T a značí se $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Spektrum operátoru T je množina všech čísel $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která operátor $\lambda I - T$ není invertibilní. Spektrum operátoru T značíme $\sigma(T)$.

Věta 113. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{K}$ splňující $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$. Je-li X komplexní, pak $\sigma(T)$ je neprázdné.*

Důkaz. Na přednášce bylo dokázáno, že $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{K}$ splňující $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$. Tato část důkazu může být zkoušena. □

Věta 114. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T^*) = \sigma(T)$. Navíc, pokud je X Hilbertův, pak $\sigma(T^\star) = \overline{\sigma(T)}$*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 115. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$.*

(a) Jestliže $\operatorname{Rng}(T)$ je uzavřený, pak $\dim \operatorname{Rng}(T) < \infty$.

(b) Jestliže $\dim X = \infty$, pak $0 \in \sigma(T)$.

(c) Jestliže $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, pak $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) < \infty$ a $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ je uzavřený.

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Věta 116 (Fredholmova alternativa)**.** *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Důsledek 117. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 118. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak pro každé $r > 0$ je množina $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| > r\}$ konečná.*

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Důsledek 119. *Nechť X je nekonečněrozměrný Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Potom $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$, kde $\{\lambda_n\}$ je posloupnost, která je buď konečná, nebo nekonečná a konvergující k 0, a je tvořena nenulovými vlastními čísly operátoru T, přičemž každé z nich má konečněrozměrný vlastní podprostor.*

Věta 120 (Druhá Fredholmova věta)**.** *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\begin{aligned} \operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) &= \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*)\big)_\perp, \\ \operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) &= \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T)\big)^\perp. \end{aligned}$$

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Věta 121 (Třetí Fredholmova věta)**.** *Nechť X je Banachův prostor, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\dim \operatorname{Ker}(\lambda I_X - T) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) < \infty.$$

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Konec 11. přednášky

IV. Lokálně konvexní prostory

Definice 122. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $\mathcal{P}$ je systém pseudonorem na X oddělující body X (tj. pro každé $x \in X \setminus \{0\}$ existuje $p \in \mathcal{P}$ splňující $p(x) \neq 0$). Pak řekneme, že $(X, \mathcal{P})$ je *lokálně konvexní prostor*.

Je–li $x \in X$ a $(x_n)_{n=1}^\infty$ posloupnost v X splňující $\lim_{n\to\infty} p(x_n - x) = 0$ pro každé $p \in \mathcal{P}$, pak řekneme že x_n *konverguje k x v $(X, \mathcal{P})$* a píšeme $x_n \overset{\mathcal{P}}{\to} x$.

Příklad 123. (i) Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor. Uvažujme $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|\}$. Pak $x_n \overset{\mathcal{P}}{\to} x$, právě když $x_n \to x$ v prostoru $(X, \|\cdot\|)$.

(ii) Nechť X je Banachův prostor. Uvažujme pro každé $x^* \in X^*$ pseudonormu p_{x^*} definovanou předpisem $p_{x^*}(x) = |x^*(x)|$, $x \in X$. Symbolem w označujeme systém pseudonorem $\{p_{x^*};\ x^* \in X^*\}$. Pak $x_n \overset{w}{\to} x$, právě když $x^*(x_n) \to x^*(x)$ pro každé $x^* \in X^*$ a v takovém případě říkáme, že x_n *slabě konverguje k x*.

(iii) Nechť X je Banachův prostor. Uvažujme pro každé $x \in X$ pseudonormu p_x na X^* definovanou předpisem $p_x(x^*) = |x^*(x)|$, $x^* \in X^*$. Symbolem w^* označujeme systém pseudonorem $\{p_x;\ x \in X\}$. Pak $x_n^* \stackrel{w^*}{\to} x^*$, právě když $x_n^*(x) \to x^*(x)$ pro každé $x \in X$ a v takovém případě říkáme, že x_n^* *slabě s hvězdičkou konverguje k* x^*.

(iv) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina, $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \mathbb{N}\}$ a $C^k(\Omega)$ vektorový prostor reálných funkcí které mají spojité všechny parciální derivace až do řádu $\leq k$. Uvažujme na $C^k(\Omega)$ systém pseudonorem $\mathcal{P}$ sestávající z pseudonorem

$$p_{m,K}(f) := \sup_{\beta \in \mathbb{N}_0^d, |\beta| \leq m} \sup_{x \in K} |(D^\beta f)(x)|, \quad m \in \mathbb{N}_0, m \leq k,\ K \subset \Omega \text{ kompaktní.}$$

Pak $(C^k(\Omega), \mathcal{P})$ je lokálně konvexní prostor a $f_n \stackrel{\mathcal{P}}{\to} f$ pokud $D^\beta f_n \to D^\beta f$ stejnoměrně na kompaktních množinách pro každé $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ splňující $|\beta| \leq k$.

Lemma 124. *Nechť $(X, \mathcal{P})$ je lokálně konvexní prostor a (x_n) posloupnost v X. Pak existuje nejvýše jedno $x \in X$ splňující $x_n \stackrel{\mathcal{P}}{\to} x$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. ☐

Lemma 125. *Nechť X je Banachův prostor.*

(a) Pokud $x \in X$ a $x_n \to x$, pak $x_n \stackrel{w}{\to} x$.

(b) Pokud $x^* \in X^*$ a $x_n^* \stackrel{w}{\to} x^*$, pak $x_n^* \stackrel{w^*}{\to} x^*$.

(c) Pokud X je reflexivní, pak $x_n^* \stackrel{w^*}{\to} x^*$, právě když $x_n^* \stackrel{w}{\to} x^*$.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. ☐

Věta 126. *Banachův prostor X je reflexivní, právě když každá omezená poslopnost $\{x_n\}$ v X má slabě konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. ☐

Tvrzení 127. *Nechť X je Banachův prostor, $\{x_n^*\}$ je posloupnost v X^*, $x^* \in X^*$ a $D \subset X$ splňuje $\overline{\operatorname{span}}\, D = X$. Pak $x_n^* \stackrel{w^*}{\to} x^*$, právě když $\{x_n^*\}$ je omezená a $x_n^*(d) \to x^*(d)$ pro každé $d \in D$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. ☐

Tvrzení 128. *Nechť X je Banachův prostor, $\{x_n\}$ je posloupnost v X, $x \in X$ a $D \subset X^*$ splňuje $\overline{\operatorname{span}}\, D = X^*$. Pak $x_n \stackrel{w}{\to} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $d(x_n) \to d(x)$ pro každé $d \in D$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. ☐

Příklady 129. Pro následující Banachovy prostory X, posloupnost $\{x_n\}$ v X a $x \in X$ platí:

(a) Pokud $X = c_0$ nebo $X = \ell_p$ pro $p \in (1, \infty)$, pak $x_n \stackrel{w}{\to} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(i) \to x(i)$, $i \in \mathbb{N}$;

(b) Pokud $X = \ell_p$ pro $p \in [1, \infty]$, pak $x_n \stackrel{w^*}{\to} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(i) \to x(i)$, $i \in \mathbb{N}$;

(c) Pokud $X = C(K)$, pak $x_n \stackrel{w}{\to} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(k) \to x(k)$, $k \in K$;

(d) Pokud $X = \ell_1$, pak $x_n \stackrel{w}{\to} x$, právě když $x_n \stackrel{\|\cdot\|}{\to} x$ (bez důkazu);

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. ☐

Definice 130. Nechť $(I, \leq)$ je částečně uspořádáná množina taková, že pro každé $i, j \in I$ existuje $k \in I$ splňující $k \geq i$ a $k \geq j$. Pokud X je množina a $(x_i)_{i \in I} \in X^I$, pak řekneme, že $(x_i)_{i \in I}$ je *net*. Pokud je $(x_i)_{i \in I}$ net v metrickém prostoru (X, d) a $x \in X$, pak řekneme že *net* $(x_i)_{i \in I}$ *konverguje k* x, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $i_0 \in I$ splňující že $d(x_i, x) < \varepsilon$ pro $i \geq i_0$.

Definice 131. Nechť $(X, \mathcal{P})$ je lokálně konvexní prostor. Je–li $x \in X$ a $(x_i)_{i \in I}$ net v X splňující $\lim_{i \in I} p(x_i - x) = 0$ pro každé $p \in \mathcal{P}$, pak řekneme že x_i *konverguje k* x *v* $(X, \mathcal{P})$ a píšeme $x_i \stackrel{\mathcal{P}}{\to} x$.

Symbolem $(X, \mathcal{P})^*$ označujeme spojitá lineární zobrazení $f : X \to \mathbb{K}$, tedy taková lineární zobrazení f, pro která platí, že kdykoliv net (x_i) konverguje k x v $(X, \mathcal{P})$, pak $f(x_i) \to f(x)$.

Příklad 132. Nechť X je Banachův prostor. Pak platí

(i) $(X, w)^* = X^*$.

(ii) $(X^*, w^*)^* = \varepsilon(X)$.

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. $\square$

Věta 133 (Oddělování konvexních množin)**.** *Nechť $(X, \mathcal{P})$ je lokálně konvexní prostor a $A, B \subset X$ jsou disjunktní konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li A otevřená, pak existuje $f \in (X, \mathcal{P})^*$ takový, že $\operatorname{Re} f(x) < \inf_B \operatorname{Re} f$ pro každé $x \in A$.

(b) Je-li A uzavřená a B kompaktní, pak existuje $f \in (X, \mathcal{P})^*$ takový, že $\sup_A \operatorname{Re} f < \inf_B \operatorname{Re} f$.

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. $\square$

Konec 12. přednášky