CVIČENÍ 1

1. Teoretičtější příklady

a) Dokažte následující tvrzení (až je dokážete, je možné je používat jako "známá tvrzení")

Věta 1. Nechť P a Q jsou metrické prostory, $f, g\colon P \to Q$ jsou spojitá zobrazení a $M \subset P$ je hustá v P. Jestliže $f = g$ na M, pak $f = g$ na celém P.

Věta 2. Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak funkce $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ je 1-Lipschitzovská na P.

Věta 3. Součin $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ úplných metrických prostorů $X_1, \ldots, X_n$ je též úplný.

Věta 4 (důsledek Bairovy věty)**.** Nechť P je úplný metrický prostor, $\{F_n\} \subset P$ je posloupnost uzavřených množin v P a $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že F_n má neprázdný vnitřek.

Věta 5. Prostory c_0 a ℓ_p pro $p \in [1, \infty)$ jsou separabilní.

Věta 6. Prostor ℓ_∞ není separabilní.

2. Konkrétnější příklady

a) Nechť je dána posloupnost $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ v $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ předpisem

$$f_n(k) := \frac{k+1}{k^2+2} + \frac{n+1}{n^2 k}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{c_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_\infty\}$. Zjistěte, zda f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou prvky Banachova prostoru X. Dále zjistěte zda je posloupnost f_n konvergentní v Banachových prostorech c_0 a ℓ_∞ (a pokud ano, určete její limitu).

b) Nechť je dána posloupnost funkcí $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ předpisem

$$f_n(x) := \frac{e^x - 1}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{n^2}{(n^2 - 1 + e^x)^2}, \quad n \in \mathbb{N}, x \in [0,1].$$

Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{C([0,1]), L_1([0,1]), L_2([0,1]), L_3([0,1]), L_\infty([0,1])\}$. Zjistěte, zda f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou prvky Banachova prostoru X. Pokud ano, zjistěte zda je posloupnost f_n konvergentní v Banachově prostoru X (a pokud ano, určete její limitu).

c) Nechť $Y \subset L_1([0,1])$ je množina daná předpisem

$$Y := \{f \in L_1([0,1])\colon \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}.$$

Určete, zda Y je uzavřený podprostor $L_1([0,1])$ a pokud ano, zda má nekonečnou dimenzi.

d) Nechť $Y \subset \ell_2$ je množina daná předpisem

$$Y := \{x \in \ell_2\colon \sum_{n=1}^{7} x_n = 0\}.$$

Určete, zda Y je uzavřený podprostor ℓ_2 a pokud ano, zda má nekonečnou dimenzi.

CVIČENÍ 2

1. Teoretičtější příklady, které by ale studenti opravdu měli ovládat

a) Nechť X je normovaný lineární prostor. Ukažte, že $B(x,r) = x + B(0,r)$ a $B(0,r) = rB(0,1)$.

b) Ukažte, že $B(x,r)$ a $U(x,r)$ jsou konvexní množiny.

c) Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $M \subset X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Ukažte, že $\overline{\alpha M} = \alpha \overline{M}$.

d) Ukažte, že v normovaném lineárním prostoru platí $\overline{U(x,r)} = B(x,r)$, $\operatorname{Int} B(x,r) = U(x,r)$ a $\partial U(x,r) = \partial B(x,r) = S(x,r)$. Nalezněte příklad metrického prostoru, kde tyto rovnosti neplatí.

2. Další teoretičtější příklady

a) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory ℓ_p a ℓ_q pro $p < q$? Jaký je jejich vztah k prostoru c_0?

b) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory $L_p([0,1])$ a $L_q([0,1])$ pro $p < q$?

c) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory $L_p(\mathbb{R})$ a $L_q(\mathbb{R})$ pro $p < q$?

d) Dokažte následující tvrzení (až jej dokážete, je možné je používat jako "známé tvrzení")

Věta 7. Nechť (P,ρ) a (Q,σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $M \subset P$ je hustá v P a $f : M \to Q$ je stejnoměrně spojité zobrazení. Pak existuje spojité rozšíření f na celé P. Toto rozšíření je určeno jednoznačně a je stejnoměrně spojité.

3. Ukažte, že $\varphi : X \to \mathbb{K}$ je spojitý lineární funkcionál, spočtěte jeho normu a zjistěte, zda φ své normy nabývá, jestliže

a) $X = \ell_1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n$; b) $X = c_0$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n$;

c) $X = C([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t)\,\mathrm{d}t$; d) $X = L_\infty([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t)\,\mathrm{d}t$;

e) $X = \ell_1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$; f) $X = \ell_1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}) x_{2n}$;

g) $X = \ell_2$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n$; h) $X = \ell_p$ (kde $p \in (1,\infty)$), $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n$;

i) $X = C([0,1])$, $\varphi(f) = f(0) - f(1)$; j) $X = L_\infty([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$;

k) $X = L_1([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$; l) $X = L_1([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t)\,\mathrm{d}t$.

CVIČENÍ 3

1. Teoretičtější příklady
a) Dokažte následující tvrzení (až je dokážete, je možné je používat jako "známé tvrzení")

Věta 8. Nechť K je kompaktní metrický prostor. Pak prostor $C(K)$ je separabilní.

2. Ukažte, že $T : X \to Y$ je spojitý lineární operátor, spočtěte jeho normu a zjistěte, zda existuje $x \in S_X$ splňující $\|Tx\| = \|T\|$. Dále zkoumejte následující otázky:

- **Je operátor T prostý? Pokud ne, zjistěte jeho jádro.**
- **Je operátor T na?**
- **Je operátor T izometrie, případně izomorfismus? Pokud ano, popište jeho obor hodnot a spočtěte normu inverzního operátoru.**

a) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, \ldots)$; b) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$;
c) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (\frac{n}{n+1}x_n)_{n=1}^{\infty}$; d) $X = Y = C([0, r])$, kde $r > 0$, $T(f)(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$;
e) $X = C([0, r])$, $Y = C^1([0, r])$, kde $r > 0$, $T(f)(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$;
f) $X = Y = \ell_1$, $T((x_n)) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \ldots)$; g) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_2, 0, x_4, \ldots)$;
h) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (\frac{n+1}{n}x_n)_{n=1}^{\infty}$; i) $X = \ell_1$, $Y = \ell_\infty$, $T((x_n)) = (x_1 + \ldots + x_n)_{n=1}^{\infty}$;
j) $X = Y = C([0, 1])$, $Tf = f + f(1) - f(0)$;
k) $X = Y = C([0, 1])$, $Tf(t) = (t - \frac{1}{2})f(t)$;
l) $X = Y = C([-1, 1])$, $Tf(t) = f(t^2)$;
m) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1 - x_2, x_2 - 2x_1, x_3, x_4, \ldots)$ (těžší příklad).

3. Další vhodné příklady:
[1, příklady z oddílů 1 a 2 - některé z nich použity výše]
[2, příklady 1.2.6 (a)-(h), 1.2.11 (a)-(i)]

[1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-normy.pdf`
[2] sbírka řešených příkladů z webu:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/fa-priklady.pdf`

CVIČENÍ 4

1. Teoretičtější příklady
a) Dokažte následující tvrzení (až je dokážete, je možné je používat jako "známé tvrzení")

Věta 9. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je lebesgueovsky měřitelná množina a $p \in [1, \infty)$. Pak $C_c(\Omega)$ je hustá podmnožina $L_p(\Omega, \lambda)$, kde

$$C_c(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} \colon f \text{ je spojitá a } \{f \neq 0\} \text{ je omezená}\}$$

Věta 10. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je lebesgueovsky měřitelná množina a $p \in [1, \infty)$. Pak prostor $L_p(\Omega, \lambda)$ je separabilní.

2. Ukažte, že $T : X \to Y$ je spojitý lineární operátor, spočtěte jeho normu a zjistěte, zda existuje $x \in S_X$ splňující $\|Tx\| = \|T\|$. Dále zkoumejte následující otázky:

- **Je operátor T prostý? Pokud ne, zjistěte jeho jádro.**
- **Je operátor T na?**
- **Je operátor T izometrie, případně izomorfismus? Pokud ano, popište jeho obor hodnot a spočtěte normu inverzního operátoru.**

a) $X = C^1([0, 1])$, $Y = C([0, 1])$, $T(f) = f' - f$; b) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$;
c) $X = C^2([0, 1])$, $Y = C([0, 1])$, $Tf = f'' + f$. d) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $Tf(t) = (t - \frac{1}{2})f(t)$.
e) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $Tf = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} \cdot f$

3. Ukažte, že $T : X \to Y$ je dobře definovaný spojitý lineární operátor
a) $X = L_1([0, 1])$, $Y = C^1([0, 1])$, $Tf(x) = \int_0^1 f(y) \exp(xy)\, \mathrm{d}y$
b) $X = L_1([0, 2])$, $Y = L_1([0, 2])$, $Tf(t) = \int_0^1 f(s) \mathrm{d}s + f(t)$
c) $X = C([0, 1])$, $Y = L_2([0, 1], \sin t\, \mathrm{d}\lambda)$, $Tf(t) = \sqrt{t} f(t)$
d) $X = C([0, 1])$, $Y = c_0$, $Tf = \big(f(\frac{1}{n}) - f(0)\big)_{n=1}^{\infty}$

4. Vyšetřete, pro které hodnoty parametru $k \in \mathbb{Z}$ je $T : X \to Y$ dobře definovaný spojitý lineární operátor
a) $L_3([0, 5])$, $Y = L_1([0, 5]^2)$, $Tf(x, y) = \frac{f(x)}{(xy)^k}$
b) $X = C([-\pi, \pi])$, $Y = \mathbb{R}$, $T(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\sin t)^k\, \mathrm{d}t$
c) $X = L_2([0, 1])$, $Y = \mathbb{R}$, $Tf = \int_0^1 x^k f(x)\, \mathrm{d}x$

5. Další vhodné příklady:
a) počítací viz. [1, příklady (u), (w)-(z) z oddílů 3 a 4] (některé použity výše)
b) [2, příklady ze sekce 1.2]

[1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-normy.pdf`
[2] sbírka řešených příkladů z webu:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/fa-priklady.pdf`

CVIČENÍ 5

Na cvičení se psala zápočtová písemka. Její zadání je níže (všechny prostory jsou reálné).

Příklad 1:(6 bodů) Které z následujících funkcí $T : C([0,1]) \to L_2([0,1])$ jsou spojité a lineární? Své tvrzení dokažte.

1. $Tf = f$ pro $f \in C([0,1])$;
2. $Tf = f^3$ pro $f \in C([0,1])$;
3. $Tf(t) = f(t^3)$ pro $f \in C([0,1])$ a $t \in [0,1]$.

Příklad 2:(6 bodů) Nechť je dáno zobrazení $T : \ell_1 \to \ell_1$ definované předpisem

$$Tx = \left(\int_0^1 x_n t^n \,\mathrm{d}t \right)_{n=1}^{\infty}, \qquad x \in \ell_1.$$

1. Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor.
2. Určete normu operátoru T.
3. Zjistěte, zda je T izomorfismus do.

Příklad 3:(8 bodů) Nechť je dáno zobrazení $T : L_1([0,1]) \to L_1([0,1], t\,\mathrm{d}t)$ definované předpisem

$$Tf(t) = (t+2)f(t), \qquad f \in L_1([0,1]),\ t \in [0,1].$$

1. Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor.
2. Určete normu operátoru T.
3. Zjistěte, zda je T izomorfismus do.

CVIČENÍ 6

1. V následujícím příkladě je dán Hilbertův prostor H, jeho uzavřený podprostor Y a bod $x_0 \in H$. Najděte nějakou ortonormální bázi Y, napište vzorec pro ortogonální projekci na Y a najděte nejbližší bod v Y k bodu x_0.

a) $H = \mathbb{C}^3$, $Y = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : \ ix_1 + ix_2 - x_3 = 0\}$, $x_0 = (i, 2, 0)$.
b) $H = L_2([-1, 1])$, Y podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2, $x_0(t) = \sin t$.
c) $H = L_2([-1, 1], \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t)$, Y podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2, $x_0(t) = t^3$.
(připomeňme, že mírou $\mu = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ rozumíme borelovskou míru μ, pro kterou platí $\int_A f(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_A \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$).
d) $H = L_2((0, \infty), e^{-t}\,\mathrm{d}t)$, Y podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2, $x_0(t) = t^5$.
e) $H = \ell_2$, $Y = \operatorname{span}\{(2^{-n})_{n=1}^{\infty}, (3^{-n})_{n=1}^{\infty}\}$, $x_0 = e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$.

2. Další vhodné příklady:

f) [1, příklady 1-7] (některé použity výše)
g) [2, příklady ze sekce 1.4] (některé použity výše)

[1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-projekce.pdf`
[2] sbírka řešených příkladů z webu:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/fa-priklady.pdf`

CVIČENÍ 7

1. Nechť v Hilbertově prostoru $H = \mathbb{R}^3$ je dán podprostor $Y = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
a) Určete $Y^\perp$. b) Určete $\dim Y$. c) Najděte nějakou ortonormální bázi Y. d) Napište vzorec pro ortogonální projekci na Y. e) Nechť $x_0 = (1, 1, 1)$. Spočtěte $\|[x_0]\|_{H/Y}$.

2. Nechť v Hilbertově prostoru $H = L_2([-1, 1], \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t)$ jsou dány body $f_n \in H$, $n \in \mathbb{N}_0$ definované předpisem $f_n(t) = \cos(n \arccos t)$, $t \in (-1, 1)$.
a) Dokažte, že $\{f_n \colon n \in \mathbb{N}_0\}$ je ortogonální systém v H.
(*Hint: použijte vzorec* $\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\big(\cos((a+b)x) + \cos((a-b)x)\big)$)
b) Určete příslušný ortonormální systém.
c) Dokažte, že platí $f_{n+1}(t) + f_{n-1}(t) = 2t f_n(t)$ pro $t \in (-1, 1)$ a $n \geq 1$.
d) Z předchozího odvoďte, že f_n je polynom n-tého stupně s koeficientem 2^{n-1} při mocnině x^n, $n \in \mathbb{N}$.
e) Ukažte, že funkce $f(x) = \arccos x$, $x \in (-1, 1)$ patří do prostoru H a určete bod $Pf \in M$, kde $M = \overline{\operatorname{span}}\{f_n \colon n \in \mathbb{N}_0\}$ a $f - Pf \perp M$.

3. Nechť v Hilbertově prostoru $H = L_2(-1, 1)$ je dán podprostor $Y = \{f \in H \colon f$ je lichá funkce$\}$.
a) Určete $Y^\perp$. b) Napište vzorec pro ortogonální projekci na Y.
(*Hint: Každou funkci $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ lze jednoznačně napsat jako součet sudé a liché funkce*)

CVIČENÍ 8

1. Ukažte, že $T \in L(X,Y)$ a vyjádřete duální operátor $T^* \in L(Y^*, X^*)$ pomocí reprezentace duálů klasických prostorů. V případě, že X a Y jsou Hilbertovy, vyjádřete také hilbertovsky adjungovaný operátor $T^\star$.

a) $X = (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$;
b) $X = (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + ix_2, (1+i)x_1 - x_2, x_1 - 2ix_2)$;
c) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, ix_1, x_2, \ldots)$; d) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1, ix_2, x_3, ix_4, \ldots)$;
e) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1 - x_2, x_2 - 2x_1, x_3, x_4, \ldots)$;
f) $X = Y = \ell_1$, $T((x_n)) = (\frac{2}{1}x_2, -\frac{1}{2}x_1, \frac{3}{2}x_4, -\frac{2}{3}x_3, \ldots, \frac{n+1}{n}x_{2n}, -\frac{n}{n+1}x_{2n-1}, \ldots)$;
g) $X = \ell_1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = (\frac{x_1 + \ldots x_n}{n})_{n=1}^\infty$; h) $X = \ell_1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = (\sum_{k=n}^\infty x_k)_{n=1}^\infty$;
i) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty)$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$; j) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty)$, $T(f)(t) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} \cdot f$;
k) $X = Y = L_2([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^1 \min(s,t) f(s)\,\mathrm{d}s$.

2. Další vhodné příklady:
l) [1, příklady 1 a 2 (a)-(m)] (některé použity výše)
m) [2, Příklad 1 (a)-(e) a Příklad 2 (a)-(e) ze sekce 4.1] (některé použity výše)

[1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-dualniop.pdf`
[2] sbírka řešených příkladů z webu:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/fa-priklady.pdf`

CVIČENÍ 9

1. Ukažte, že $T \in L(X,Y)$ a vyjádřete duální operátor $T^* \in L(Y^*,X^*)$ pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.
a) $X = \ell_1$, $Y = C([0,1])$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$, $t \in [0,1]$; b) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = f(1-t)$;
c) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^t f$; d) $X = \ell_1$, $Y = L_3([0,1])$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$, $t \in [0,1]$;
e) $X = Y = C([-1,1])$, $Tf(t) = f(t^2)$; f) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = f + f(1) - f(0)$;
g) $X = C([0,1])$, $Y = c_0$, $Tf = \big(f(\frac{1}{n}) - f(0)\big)_{n=1}^{\infty}$; h) $X = Y = L_1([0,2])$, $Tf = \int_0^1 f(s)\mathrm{d}s + f(t)$;
i) $X = C([0,1])$, $Y = L_2([0,1], \sin t\, \mathrm{d}\lambda)$, $Tf(t) = \sqrt{t} f(t)$;
j) $X = L_1([0,1])$, $Y = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $Tf = \big(\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t, \int_0^1 \cos(t)f(t)\,\mathrm{d}t\big)$

2. Další vhodné příklady:
k) [2, Příklad 1 (f)-(j) a Příklad 2 (f)-(j) ze sekce 4.1] (některé použity výše)

[2] sbírka řešených příkladů z webu:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/fa-priklady.pdf`

CVIČENÍ 10

Studenti mohou při řešení následujících příkladů používat následující větu

Věta 11 (Arzela-Ascoli)**.** Nechť K je kompaktní metrický prostor a $F \subset C(K, \mathbb{R})$. Pak F je relativně kompaktní v $C(K, \mathbb{R})$, právě když je omezená a stejně spojitá.

Proof. Viz. [8, Věta 13.4.6]. □

1. Určete, zda je operátor $T \in L(X, Y)$ kompaktní
a) $X = (\mathbb{K}^2, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{K}^4, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + 4x_2, x_2 - 3x_1, 4x_1 + 5x_2)$
b) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots)$ c) $X = Y = c_0$, $T((x_n)) = (\frac{1}{n}x_n)_{n=1}^{\infty}$
d) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $p \in [1, \infty)$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$; e) $X = Y = C([0,1])$, $T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$;
f) $X = (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$;
g) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (\frac{1}{n^2}x_n)_{n=1}^{\infty}$; h) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1 - x_2, 2x_2 - x_1, x_3, x_4, \ldots)$;
i) $X = \ell_{3/2}$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = \left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2n}}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$; j) $X = Y = C([0,1])$, $T(f) = f - 3f(0) + 2f(1)$
k) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $p \in [1, \infty)$, $Tf(t) = tf(t)$; l) $X = \ell_1$, $Y = L_1([0,1])$, $T(f)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$;
m) $X = Y = C([0,1])$, $T(f)(t) = \int_0^1 \exp(2ts) f(s)\,\mathrm{d}s$; n) $X = C([0,1])$, $Y = c_0$, $Tf = \left(f(\frac{1}{n}) - f(0)\right)_{n=1}^{\infty}$;
o) $X = Y = L_1([0,2])$, $Tf(t) = \int_0^1 f(s)\mathrm{d}s + f(t)$; p) $X = c_0$, $Y = C([0, 2\pi])$, $Tx(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \cos(nt)$
q) $X = Y = L_2([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^1 \min(s,t) f(s)\,\mathrm{d}s$
(Hint: Uvažujte operátory $A : L_2([0,1]) \to C([0,1])$ a $B : C([0,1]) \to L_2([0,1])$, kde A je dáno stejným předpisem jako T a B je "identita" (přesněji: $Af(t) = \int_0^1 \min(t,s) f(s)\,\mathrm{d}s$ a $Bf = [f]$). Ukažte, že A a B jsou lineární, spojité a s pomocí Arzela-Ascoliho věty ukažte, že A je kompaktní. Na závěr použijte identitu $T = B \circ A$.)

2. Další vhodné příklady:
r) [1, příklady 1-33] (některé použity výše)
s) [2, Příklady 4 a 6 ze sekce 4.2] (některé použity výše)

[1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-kompakt.pdf`
[2] sbírka řešených příkladů z webu:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/fa-priklady.pdf`
[8] připravovaná skripta z mat. analýzy, umístěna na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf`

CVIČENÍ 11

Vhodné příklady k domácímu studiu týkající se výpočtu spektra:
[2, Příklady 7, 10 (a,c,d,f,h,i) a 12 (a,b,d,e,f,k) ze sekce 4.3]

[2] sbírka řešených příkladů z webu:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/fa-priklady.pdf`

Na cvičení se dále psala zápočtová písemka. Její zadání je níže (všechny prostory jsou reálné).

Příklad 1:[9 bodů] Nechť je dáno zobrazení $T : C([0,1]) \to L_1([0,1])$ definované předpisem

$$Tf(t) = \int_0^1 t \cdot f(x) x^2 \, \mathrm{d}x, \qquad f \in C([0,1]),\ t \in [0,1].$$

1. Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor.
2. Vyjádřete duální operátor T^* pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.
3. Zjistěte, zda je T kompaktní operátor.

Příklad 2:[11 bodů] Nechť je dáno zobrazení $T : c_0 \to L_2([0,\infty))$ definované předpisem

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} \chi_{(n,n+1)}, \qquad x \in c_0.$$

1. Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor.
2. Vyjádřete duální operátor T^* pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.
3. Zjistěte, zda je T kompaktní operátor.

CVIČENÍ 12

1. Pro následující operátory ukažte že $T \in \mathcal{L}(X)$ a určete $\sigma(T)$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

a) $X = \ell_1$, $T(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2n}, x_{2n-1}, \dots)$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem komplexních čísel)
b) $X = C([0,1])$, $Tf(t) = f(t) + f(1) - f(0)$; c) $X = L_1([0,1])$, $Tf(t) = 2f(t) + t\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + t^2 \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$;
d) $X = c_0$, $T(x) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, x_3, \frac{1}{4}x_4, x_5, \frac{1}{6}x_6, \dots)$; e) $X = L_3([0,1])$, $Tf(t) = t^2 f(t)$;
f) $X = \ell_2$, $T((x_n)) = (-x_2, x_1, -\frac{1}{2}x_4, x_3, -\frac{1}{3}x_6, x_3, \dots)$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem komplexních čísel)
g) $X = C([0,1])$, $Tf(t) = f(t) + tf(1)$; h) $X = L_1((0,\infty), e^{-t}\,\mathrm{d}t)$, $Tf(x) = f(x) + x^2 \int_0^\infty f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$;
i) $X = \ell_1$, $Tx = (\frac{n+1}{n}x_n)_{n=1}^\infty$; j) $X = C([0,1])$, $T(f)(t) = tf(t)$;
k) $X = L_2([0,1])$, $T(f)(t) = \chi_{[0,1/2]}(t) \cdot f(t)$;
l) $X = C([-1,1])$, $T(f)(t) = f(|t|)$; m) $X = L_1([0,2])$, $Tf(t) = \int_0^1 f(s)\mathrm{d}s + f(t)$.

Výsledky:

a) $\sigma_p(T) = \{\pm i\} = \sigma(T)$ b) $\sigma_p(T) = \{1\} = \sigma(T)$ c) $\sigma_p(T) = \{2, \frac{57+\sqrt{79}}{24}, \frac{57-\sqrt{79}}{24}\} = \sigma(T)$
d) $\sigma_p(T) = \{\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$ e) $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = [0,1]$
f) $\sigma_p(T) = \{\pm\frac{i}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$ g) $\sigma_p(T) = \{1,2\} = \sigma(T)$ h) $\sigma_p(T) = \{1,3\} = \sigma(T)$
i) $\sigma_p(T) = \{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{1\}$ j) $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = [0,1]$ k) $\sigma_p(T) = \{0,1\} = \sigma(T)$
l) $\sigma_p(T) = \{0,1\} = \sigma(T)$ m) $\sigma_p(T) = \{1,2\} = \sigma(T)$

Řešení prvních pěti příkladů ze dvanáctého cvičení: a) Je snadné si rozmyslet, že operátor T je lineární izometrie na, a tedy $\|T\| = 1$.

Vyšetřeme nejprve bodové spektrum. Hledáme tedy ta $\lambda \in \mathbb{C}$, pro která má rovnice

$$\lambda x = T((x_n)) = (-x_2, x_1, \dots, -x_{2n}, x_{2n-1}, \dots)$$

nenulové řešení v ℓ_1. Protože operátor T je prostý, vidíme že takové řešení neexistuje pro $\lambda \neq 0$. Dále snadno nahlédneme, že pro $\lambda \neq 0$ je $x \in \ell_1$ řešením rovnice výše, právě když pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\lambda x_{2n-1} = -x_{2n} \text{ a zároveň } \lambda x_{2n} = x_{2n-1},$$

což (vzhledem k tomu že $\lambda \neq 0$ a tedy $x_{2n} \neq 0 \neq x_{2n-1}$) je ekvivalentní rovnostem

$$-\lambda x_{2n-1} = x_{2n} = \tfrac{x_{2n-1}}{\lambda},$$

tedy $\lambda^2 = -1$, což je ekvivalentní podmínce $\lambda = \pm i$ (za $x \in \ell_1 \setminus \{0\}$ lze pak zvolit například posloupnost $x = e_1 - \lambda e_2$). Zjistili jsme tedy, že $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\pm i\}$.

Nyní určíme $\sigma(T)$. Zvolme $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Abychom zjistili, zda je operátor $\lambda I - T$ na, budeme pro $y \in \ell_1$ hledat $x \in \ell_1$ splňující $\lambda x - Tx = y$. Porovnáním souřadnic $2n$ a $2n-1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostáváme, že $\lambda x - Tx = y$, právě když pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\lambda x_{2n-1} + x_{2n} = y_{2n-1} \text{ a zároveň } \lambda x_{2n} - x_{2n-1} = y_{2n},$$

což odpovídá řešení soustavy lineárních rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & y_{2n-1} \\ -1 & \lambda & y_{2n} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & y_{2n-1} \\ -1-\lambda^2 & 0 & y_{2n} - \lambda y_{2n-1} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & y_{2n-1} \\ 1 & 0 & \frac{1}{1+\lambda^2}(\lambda y_{2n-1} - y_{2n}) \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} y_{2n-1} + \frac{\lambda}{1+\lambda^2} y_{2n} \\ 1 & 0 & \frac{1}{1+\lambda^2}(\lambda y_{2n-1} - y_{2n}) \end{array}\right),$$

a tedy kdykoliv $y \in \ell_1$, pak posloupnost x splňuje $\lambda x - Tx = y$, právě když $x_{2n} = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} y_{2n-1} + \frac{\lambda}{1+\lambda^2} y_{2n}$ a $x_{2n-1} = \frac{1}{1+\lambda^2}(\lambda y_{2n-1} - y_{2n})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Uvědomme si, že takto definovaná posloupnost x je prvkem ℓ_1, neboť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\tfrac{1}{1+\lambda^2}(\lambda y_{2n-1} - y_{2n})\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left|\tfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} y_{2n-1} + \tfrac{\lambda}{1+\lambda^2} y_{2n}\right| \leq \tfrac{2|\lambda|+2+|\lambda^2|}{|1+\lambda^2|} \|y\| < \infty.$$

Ověřili jsme tedy, že operátor $\lambda I - T$ je prostý a na pro každé $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ a tedy $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\pm i\}$.

b) Je snadné si rozmyslet, že operátor T je spojitý, lineární a $\|T\| \leq 3$. Uvažujme operátor $S : C([0,1]) \to C([0,1])$ definovaný předpisem

$$Sf(t) = f(1) - f(0), \quad t \in [0,1].$$

Tento operátor je kompaktní, neboť je jednodimenzionální (funkce $t \mapsto 1$ generuje $\operatorname{Rng} S$). Nejprve zjistíme bodové spektrum operátoru S. Nechť tedy $\lambda \in \mathbb{K}$, a uvažujme rovnici

$$f(1) - f(0) = \lambda f(t), \quad t \in [0,1].$$

Pokud $\lambda = 0$, potom je tato rovnice splněna pro libovolnou funkci $f \in C([0,1])$ splňující $f(0) = f(1)$, a tedy $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(S)$. Pokud $\lambda \neq 0$, pak vidíme, že f musí být konstantní funkce rovná $\frac{f(1)-f(0)}{\lambda}$. Protože ale f je konstantní, speciálně máme $f(0) = f(1)$ a tedy f je identicky nulová na $[0,1]$. Celkem dostáváme, že nenulové řešení rovnice $S(f) - \lambda f = 0$ existuje, právě když $\lambda = 0$ a tedy $\sigma_{\mathrm{p}}(S) = \{0\}$. Protože S je kompaktní, máme také $\sigma(S) = \{0\}$.

Nyní, nechť I značí identický operátor na $C([0,1])$. Potom máme $T = I + S$. Dále, pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$ máme $\lambda I - T = (\lambda - 1)I - S$ a tedy $\sigma(T) = \sigma(S) + 1$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(S) + 1$. Celkem tak dostáváme $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \sigma(T) = \{1\}$.

c) Uvažujme nejprve operátor $S : C([0,1]) \to C([0,1])$ definovaný předpisem

$$S(f)(t) = t\int_0^1 f(x)dx + t^2\int_0^1 xf(x)dx, \quad t \in [0,1].$$

Tento operátor je kompaktní, neboť je dvoudimenzionální (funkce $t \mapsto t$ a $t \mapsto t^2$ generují $\operatorname{Rng} S$). Nejprve zjistíme bodové spektrum operátoru S. Nechť tedy $\lambda \in \mathbb{K}$, a uvažujme rovnici

$$t\int_0^1 f(x)dx + t^2\int_0^1 xf(x)dx = \lambda f(t), \quad t \in [0,1].$$

Pokud $\lambda = 0$, potom k vyřešení této rovnice stačí nalézt nenulovou funkci f takovou, že $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 0$. K tomu postačí uvažovat polynomy druhého stupně. Uvažujme tedy funkci

$$f(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2, \quad t \in [0,1].$$

Chceme, aby platilo

$$0 = \int_0^1 f(x)dx = C_0 + \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2 \quad \text{a} \quad 0 = \int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2}C_0 + \frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{4}C_2.$$

Tato soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení, jedním z nich je $C_0 = -\frac{1}{6}$, $C_2 = 1$, $C_3 = -1$. Tedy $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Nechť tedy nyní $\lambda \neq 0$. Pokud funkce f je řešením naší rovnice, potom f je lineární kombinací funkcí $t \mapsto t$ a $t \mapsto t^2$, konkrétně $f(t) = C_1 t + C_2 t^2$, kde $C_1 = \frac{\int_0^1 f(x)dx}{\lambda}$ a $C_2 = \frac{\int_0^1 xf(x)dx}{\lambda}$. Dosazením do rovnice dostaneme

$$\begin{aligned}\lambda C_1 t + \lambda C_2 t^2 &= t\int_0^1 C_1 x + C_2 x^2 dx + t^2 \int_0^1 C_1 x^2 + C_2 x^3 dx = \\ &= t(\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2) + t^2(\frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{4}C_2).\end{aligned}$$

Tedy, pokud má rovnost platit pro každé $t \in [0,1]$, pak dostáváme, že

$$\lambda C_1 = \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2 \quad \text{a} \quad \lambda C_2 = \frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{4}C_2.$$

Z první rovnice dostaneme $C_2 = 3(\lambda - \frac{1}{2})C_1$, a dosazením do druhé rovnice dostaneme

$$(9(\lambda - \frac{1}{4})(\lambda - \frac{1}{2}) - 1)C_1 = 0.$$

Pokud $C_1 = 0$, pak $C_2 = 3(\lambda - \frac{1}{2})C_1 = 0$, a tedy f je nulová funkce. Předpokládejme tedy, že $C_1 \neq 0$, a poté přenásobením rovnice číslem $\frac{8}{C_1}$ a roznásobením dostaneme kvadratickou rovnici

$$72\lambda^2 - 54\lambda + 1 = 0,$$

jejímž řešením jsou čísla

$$\lambda_1 = \frac{9 + \sqrt{79}}{24} \text{ a } \lambda_2 = \frac{9 - \sqrt{79}}{24}.$$

Tedy tato čísla leží v bodovém spektru operátoru S, přičemž vlastní vektory příslušné těmto číslům dostaneme například volbou $C_1 = 1$, tedy

$$f_1(t) = t + 3(\lambda_1 - \frac{1}{2})t^2, f_2(t) = t + 3(\lambda_2 - \frac{1}{2})t^2.$$

Tedy, jelikož operátor S je kompaktní, dostáváme

$$\sigma(S) = \sigma_p(S) = \{0, \frac{9+\sqrt{79}}{24}, \frac{9-\sqrt{79}}{24}\}.$$

Nyní, nechť I značí identický operátor na $C([0,1])$. Potom máme $T = S + 2I$. Dále, pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$ máme $\lambda I - T = (\lambda - 2)I - S$ a tedy $\sigma(T) = \sigma(S) + 2$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(S) + 2$. Celkem tak dostáváme

$$\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{2, \frac{57+\sqrt{79}}{24}, \frac{57-\sqrt{79}}{24}\}.$$

d) Je snadné si rozmyslet, že operátor T je lineární a $\|T\| \leq 2$.

Vyšetřeme nejprve bodové spektrum. Hledáme tedy ta $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která má rovnice

$$\lambda x = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, x_{2n-1}, \tfrac{1}{2n}x_{2n}, \ldots)$$

nenulové řešení v c_0. Protože operátor T je prostý, vidíme že takové řešení neexistuje pro $\lambda \neq 0$. Dále snadno nahlédneme, že pro $\lambda \neq 0$ je $x \in c_0$ řešením rovnice výše, právě když pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\lambda x_{2n-1} = x_{2n-1} \text{ a zároveň } \lambda x_{2n} = \tfrac{1}{2n}x_{2n},$$

tedy, pokud je x nenulové, pak nutně musí být $\lambda \in \{1\} \cup \{\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\}$. Pro $\lambda = 1$ rovnici řeší například $x = e_1$, pro $\lambda = \frac{1}{2n}$ například $x = e_{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Celkem tedy $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{1\} \cup \{\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Nyní určíme $\sigma(T)$. Dle předchozího máme $\sigma(T) \supset \overline{\sigma_{\mathrm{p}}(T)} = \{1, 0\} \cup \{\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\}$. Zvolme $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \overline{\sigma_{\mathrm{p}}(T)}$. Abychom zjistili, zda je operátor $\lambda I - T$ na, budeme pro $y \in c_0$ hledat $x \in c_0$ splňující $\lambda x - Tx = y$. Porovnáním souřadnic $2n-1$ a $2n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostáváme, že $\lambda x - Tx = y$, právě když pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x_{2n-1} = \frac{y_{2n-1}}{\lambda - 1}$ a $x_{2n} = \frac{y}{\lambda - 1/2n}$. Tedy kdykoliv $y \in c_0$, pak posloupnost x splňuje $\lambda x - Tx = y$, právě když $x_{2n-1} = \frac{y_{2n-1}}{\lambda - 1}$ a $x_{2n} = \frac{y}{\lambda - 1/2n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Uvědomme si, že takto definovaná posloupnost je prvek c_0, neboť

$$\|x\|_\infty \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \tfrac{1}{|\lambda - 1/2n|}, \tfrac{1}{|\lambda - 1|} \right\} \|y\|_\infty$$

a protože $\lambda \notin \overline{\sigma_{\mathrm{p}}(T)}$, je $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{|\lambda - 1/2n|}, \frac{1}{|\lambda - 1|}\} = \frac{1}{d(\lambda, \sigma_{\mathrm{p}}(T))} < \infty$. Celkem tedy $\sigma(T) = \overline{\sigma_{\mathrm{p}}(T)} = \{1, 0\} \cup \{\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\}$.

e) Je snadné si rozmyslet, že operátor T je lineární a $\|T\| \leq 1$.

Vyšetřeme nejprve bodové spektrum. Hledáme tedy ta $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq 1$, pro která má rovnice

$$\lambda f(t) = t^2 f(t)$$

nenulové řešení v $L_3([0,1])$. Z rovnice výše ale vidíme, že pokud $f(t) \neq 0$ na množině kladné míry, pak musí platit $\lambda = t^2$ na množině kladné míry, což není možné. Tedy $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \emptyset$.

Nyní určíme $\sigma(T)$. Zvolme $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq 1$. Pro $g \in L_3([0,1])$ pak řešíme rovnici $\lambda f(t) - t^2 f(t) = g(t)$, jejímž jedným řešením (až na rovnost skoro všude) je funkce

$$f(t) = \frac{g(t)}{\lambda - t^2}.$$

Pokud $\lambda \notin [0,1]$, pak takto definovaná funkce je prvkem $L_3([0,1])$, neboť

$$\|f\|^3 \leq \sup_{t \in [0,1]} \frac{1}{|\lambda - t^2|} \int |g(t)|^3 = \frac{\|g\|^3}{d(\lambda, [0,1])} < \infty.$$

Naopak, pokud $\lambda \in [0,1]$, pak pro $g(t) = 1$, $t \in [0,1]$ dostáváme, že $f(t) = \frac{1}{\lambda - t^2}$ není prvkem $L_3([0,1])$, neboť funkce $\frac{1}{|\lambda - t^2|^3}$ nemá konvergentní integrál přes interval $[0, \sqrt{\lambda}]$ nebo $[\sqrt{\lambda}, 1]$. Celkem tedy dostáváme $\sigma(T) = [0,1]$.