

CVIČENÍ 1

1. Double arrow space: Ukažte, že otevřené intervaly na lineárně uspořádaném prostoru tvoří bázi topologie (tj. splňují podmínky (B1) a (B2)). Uvažujte pak

$$[0, 1] \times \{0, 1\} := \{(x, i) : x \in [0, 1], i \in \{0, 1\}\}$$

s lexikografickým uspořádáním, tj. $(x, i) < (y, j)$ právě když $x < y$ nebo $(x = y \text{ \& } i < j)$. Příslušnému uspořádanému topologickému prostoru říkáme *double arrow space* (někdy také *split interval*). Dokažte, že následující systém tvoří bázi topologie generované uspořádáním na tomto prostoru

$$\mathcal{B} := \left\{ \{(0, 0)\}, \{(1, 1)\} \right\} \cup \{(a, b] \times \{0\} \cup [a, b) \times \{1\} : 0 \leq a < b \leq 1\}.$$

2. Necht' X je Sorgenfreyova přímka, nebo double arrow space. Dokažte, že $w(X) = 2^\omega$ a $\chi(X) = \omega$.

Dobrovolně navíc: dokažte, že X je separabilní (tj. existuje spočetná $D \subset X$ která má neprázdný průnik s každou otevřenou množinou) a odvoďte, že X není metrizable.

3. Mrówka-Isbell space: Soustava $\mathcal{A}$ nekonečných podmnožin $\mathbb{N}$ se nazývá *skoro disjunktí*, jestliže průnik každých dvou různých množin z $\mathcal{A}$ je konečný. Pro skoro disjunktí $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definujeme *Mrówka-Isbell space* $\psi(\mathcal{A})$ jako množinu $\mathbb{N} \cup \mathcal{A}$ s topologií zadanou pomocí otevřené báze okolí bodů následujícím způsobem:

- pro $n \in \mathbb{N}$ systém $\mathcal{B}(n)$ sestává z jednobodové množiny $\{n\}$,
- pro $A \in \mathcal{A}$ je báze okolí $\mathcal{B}(A)$ tvořena množinami typu $U(A; F) := \{A\} \cup (A \setminus F)$, kde $F \subset \mathbb{N}$ je konečná.

Dokažte, že pak vskutku $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in \psi(\mathcal{A})}$ splňuje podmínky (O1)-(O3) a tedy definice topologie výše je korektní. Dále ukažte, že pokud je $\mathcal{A}$ nekonečný, pak $\chi(\psi(\mathcal{A})) = \omega$, $w(\psi(\mathcal{A})) = |\mathcal{A}|$ a $\psi(\mathcal{A})$ je separabilní (tj. existuje spočetná $D \subset \psi(\mathcal{A})$ která má neprázdný průnik s každou otevřenou množinou). Odvoďte, že pokud je $\mathcal{A}$ nespočetný pak $\psi(\mathcal{A})$ není metrizable.

Dobrovolně navíc: dokažte, že existuje skoro disjunktí $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mohutnosti kontinuum.

4. Křížková topologie: Ukažte, že předpisem: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená, právě když

$$\forall (x, y) \in A \quad \exists \varepsilon > 0 : (\{x\} \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)) \cup ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times \{y\}) \subseteq A,$$

je korektně zadaná topologie na množině $\mathbb{R}^2$. Najděte otevřenou množinu v této topologii, která není otevřená v Euklidovské topologii.

5. Dokažte, že každá báze $\mathcal{B}$ prostoru X obsahuje bázi $\mathcal{C}$, že $|\mathcal{C}| = w(X)$.

Vhodné na referát: 1.-3.

CVIČENÍ 2

1. Topologie generovaná operací uzávěru Dokažte následující větu: Je-li X topologický prostor, pak pro zobrazení $\varphi: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ definované předpisem $\varphi(A) := \overline{A}$ platí

(C1) $\varphi(\emptyset) = \emptyset$,

(C2) pro $A \in \mathcal{P}(X)$ je $A \subseteq \varphi(A)$,

(C3) pro $A, B \in \mathcal{P}(X)$ je $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$,

(C4) pro $A \in \mathcal{P}(X)$ je $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$.

Navíc, kdykoliv X je množina a $\varphi: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ je zobrazení splňující podmínky (C1)-(C4) výše, pak na X existuje právě jedna topologie, pro kterou platí $\varphi(A) = \overline{A}$ pro každé $A \in \mathcal{P}(X)$.

2. Topologie generovaná operací vnitřku Zformulujte a dokažte větu analogickou jako ve cvičení II.1 výše, kde topologie bude dána vlastnostmi vnitřku množiny.

3. Vlastnosti uzávěru Dokažte, že pro množinu A v topologickém prostoru X platí:

- a) $\partial A = \partial(X \setminus A)$ b) $\partial A = \overline{A} \setminus \text{Int } A$ c) $\overline{A} = A \cup \partial A$ d) $\text{Int } A = A \setminus \partial A$ e) $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$
f) $\partial(A \cap B) \subseteq \partial A \cup \partial B$ g) $X = \text{Int } A \cup \partial A \cup \text{Int}(X \setminus A)$ h) $\partial(\overline{A}) \subseteq \partial A$ i) $\partial(\text{Int } A) \subseteq \partial A$
j) A je otevřená $\Leftrightarrow \partial A = \overline{A} \setminus A$ k) A je uzavřená $\Leftrightarrow \partial A = A \setminus \text{Int } A$ l) A je obojetná $\Leftrightarrow \partial A = \emptyset$

4. Ať X je Sorgenfreyova přímka nebo double arrow space. Dokažte:

- a) Na X je báze topologie tvořena obojetnými množinami a X je T_1 , tj. $\{x\}$ je uzavřená pro každé $x \in X$.
b) V double arrow space jsou oba proprostory $(0, 1] \times \{0\}$ a $[0, 1) \times \{1\}$ homeomorfní podprostoru Sorgenfreyovy přímky.
c) Každý podprostor X je separabilní.

5. Ať $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ je nespočetný systém nekonečných množin, který je skoro disjunktní. Ať $X := \psi(\mathcal{A})$ je příslušný Mrówka-Isbell space. Dokažte následující tvrzení:

- a) Pokud $A \in \mathcal{A}$ a $F \subset \mathbb{N}$ je konečná, pak $U(A; F)' = \{A\}$ (tj. jediným hromadným bodem bazové otevřené množiny $U(A; F)$ je bod A). b) Báze topologie na X sestává z obojetných množin. c) $A \in \mathcal{A}$ je hromadným bodem $S \subset \mathbb{N}$, právě když $A \cap S$ je nekonečná. d) X je separabilní, ale $\mathcal{A} \subset X$ je nespočetný uzavřený podprostor, který je diskrétní a tedy není separabilní. e) X je T_1 , tj. pro každý bod $x \in X$ je $\{x\}$ uzavřená množina. f) X je Hausdorffův, tj. pro každé dva různé body $x, y \in X$ existují disjunktní otevřené $U \in \mathcal{U}(x)$ a $V \in \mathcal{U}(y)$. g) Pokud $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ je maximální skoro disjunktní, pak každá spojitá funkce $f: \psi(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená.

Vhodné na referát: 1. nebo 2., 4., 5.

(modře označená tvrzení jsou nejzajímavější)

Další poznámky k úlohám: 3. budeme občas používat, jedná se o snadné cvičení, které doporučuji všem studentům si vyzkoušet (v případě nesnází lze důkazy najít ve skriptech)

CVIČENÍ 3

1. Prostor $[0, \omega_1]$: Ať $[0, \omega_1] = \{\alpha : \alpha \leq \omega_1 \text{ je ordinál}\}$ je uspořádaný topologický prostor. Dokažte:

- $[0, \omega_1]$ má bázi sestávající z obojetných množin a je $T_{3\frac{1}{2}}$.
- Platí, že $\omega_1 \in \overline{[0, \omega_1)}$, ale neexistuje spočetná množina (a tedy ani posloupnost) $A \subset [0, \omega_1)$ splňující $\omega_1 \in \overline{A}$.
- Ukažte, že kdykoliv je dána spojitá funkce $f : [0, \omega_1] \rightarrow \mathbb{R}$, pak existuje $\alpha \in \omega_1$ takové, že f je konstantní na $[\alpha, \omega_1]$.
- Nalezněte příklad funkce $f : [0, \omega_1] \rightarrow \mathbb{R}$, která není spojitá a přesto kdykoliv (x_n) je konvergentní posloupnost v $[0, \omega_1]$ a $x_n \rightarrow x$, pak $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

2. Niemytzkého rovina: Nechtě $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ s následující topologií. Body $z = (x, y)$ s kladnou druhou souřadnicí mají za bázi euklidovská okolí $U(z, r) = \{t \in X : \|t - z\|_2 < r\}$, $r > 0$, zatímco body $z = (x, 0)$ mají za bázi okolí množiny $\{z\} \cup D_r$, $r > 0$, kde $D_r := U((x, r), r)$ pro $r > 0$.

a) Ukažte, že X je topologický prostor (tj. ověřte že systém okolí splňuje (O1)-(O3)). Topologii na X označme τ^* .

b) Ať τ je Euklidovská topologie na X . Ukažte, že $\tau \subset \tau^*$. Speciálně, X je T_2 .

c) Ukažte, že X je $T_{3\frac{1}{2}}$. Hint: zvolte $A \subset X$ uzavřenou a $b \notin A$. Pokud je $b \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, najděte $U \in \mathcal{U}_\tau(b)$ že $U \subset X \setminus A$ a s pomocí úplné regularity (X, τ) najděte spojitou funkci $f : (X, \tau) \rightarrow [0, 1]$, která oddělí b a $X \setminus U$, tato funkce pak bude spojitá i vůči τ^* . Pokud je $b = (c, 0)$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$, pak zvolme $\delta > 0$ že $\{b\} \cup D_\delta \subset X \setminus A$ a ukažte, že funkce $f : X \rightarrow [0, 1]$ definovaná jako $f(b) = 0$, $f(y) = 0$ pro $y \notin \{b\} \cup D_\delta$ a $f((x, y)) = \| (x, y) - b \|^2 / 2\delta y$ pro $(x, y) \in D_\delta$ odděluje b a A a že tato funkce je spojitá neboť $f^{-1}([0, \alpha)) = D_\alpha$ a $f^{-1}((\alpha, 1]) = X \setminus \overline{D_\alpha}$.

d) Ukažte, že X není T_4 . Hint: Uvažme $A := \mathbb{Q} \times \{0\}$ a $B = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \{0\}$, dokažte že se jedná o uzavřené množiny. Pro spor předpokládejme, že U a V jsou disjunktní otevřené, $U \supset A$ a $V \supset B$. Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ najděme $r_x > 0$ že $\{(x, 0)\} \cup D_{r_x} \subset V$ a uvažujme $S_n := \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : r_x > 1/n\}$. Pak $\mathbb{Q}$ a S_n , $n \in \mathbb{N}$ pokrývají $(\mathbb{R}, \tau)$ a z Bairovy věty nalezneme n_0 a otevřený neprázdný interval (a, b) , který je obsažen v S_{n_0} . Zvolte $q \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$ a ukažte, že každé τ^* -okolí $(q, 0)$ protne V , což je spor s tím, že $U \cap V = \emptyset$.

3. Dokažte, že průnik T_1 topologií na dané pevné množině je opět T_1 topologie. Platí obdobné tvrzení pro T_0 a T_2 topologie?

4. Další vlastnosti křížkové topologie: Dokažte, že $\mathbb{R}^2$ s křížkovou topologií nemá spočetný charakter v žádném bodě. Přesto však ke každému bodu $x \in \mathbb{R}^2$ existuje spočetně mnoho okolí U_n , že $\{x\} = \bigcap U_n$.

Vhodné na referát: 1. - 4. (2. je trochu delší .. na referát je bod 2d) volitelně navíc)

CVIČENÍ 4

1. Součiny metrizovatelných prostorů: Nechť I je nespočetná množina a nechť X_i , $i \in I$ jsou metrizovatelné prostory které mají alespoň dva body. Dokažte, $\prod_I X_i$ nemá spočetný charakter (a tedy nespočetný součin netriviálních metrických prostorů není metrizovatelný).

2. Prostor 2^I : Uvažujme $2 = \{0, 1\}$ s diskrétní topologií a nechť I je nespočetná množina. Dokažte:

a) Pokud I je nespočetná množina, uvažujme nulovou posloupnost $\mathbf{o}$ (tj. $\mathbf{o}(i) = 0$, $i \in I$) a množinu D sestávající s posloupností, které mají hodnotu nula nejvýše na spočetně mnoha souřadnicích (tj. $d \in D$ iff $|\{i: d(i) = 0\}| \leq \omega$). Ukažte, že pak $\mathbf{o} \in \overline{D}$ ale neexistuje žádná spočetná podmnožina (a tedy ani posloupnost) $A \subset D$ splňující $\mathbf{o} \in \overline{A}$.

b) Dokažte, že pokud $|I| > 2^\omega$, pak 2^I není separabilní. (*Hint:* Pokud je dána hustá podmnožina $D \subset 2^I$, dokažte že zobrazení $I \ni i \mapsto D_i := D \cap \{x: x(i) = 0\} \in \mathcal{P}(D)$ je prosté a tedy bude $|I| \leq 2^{|D|}$.)

Můžete se pokusit postup důkazu dále zobecnit a dokázat, že pokud $|I| > 2^\omega$ a X_i , $i \in I$ jsou alespoň dvoubodové T_2 prostory, pak $\prod_I X_i$ není separabilní.

3. Separabilita prostoru $2^{\mathbb{R}}$: Dokažte, že $2^{\mathbb{R}}$ je separabilní prostor.

Hint: Označme jako J množinu všech zobrazení $\varphi: S \rightarrow \{0, 1\}$, kde $S = \{I_1, \dots, I_n\}$ je konečná množina po dvou disjunktních racionálních intervalů. Pro každé $\varphi \in J$ zvolme $f_\varphi \in 2^{\mathbb{R}}$ tak, že $f_\varphi(x) = \varphi(I)$ kdykoliv $x \in I$ a $I \in \text{dom}(\varphi)$. Dokažte, že $\{f_\varphi: \varphi \in J\}$ je spočetná hustá podmnožina $2^{\mathbb{R}}$.

Poznámka: Platí dokonce obecnější věta (Hewitt-Marczewski-Pondiczery): součin nejvýše $|\mathbb{R}|$ (tj. kontinuum mnoha) separabilních prostorů je separabilní.

4. Součiny konvergentních posloupností: Ať $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}\}$. Proč nejsou žádné dva z prostorů X , X^2 , X^3 homeomorfní?

5. Prostor reálných funkcí s topologií bodové konvergence:

a) Nechť $H(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ značí množinu všech homeomorfismů z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Je $H(\mathbb{R})$ hustá v $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$?

b) Nechť $U \subset \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ je množina všech stejnoměrně spojitých funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Je U hustá v $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$?

c) Je spojitě zobrazení $I: \mathcal{C}_p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dané předpisem $I(f) := \int_0^1 f(x) dx$?

d) Je spojitě zobrazení $P: \mathcal{C}_p([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}_p([0, 1])$ dané předpisem $P(f)(t) := \int_0^t f(x) dx$?

6. Dokažte, že $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ nemá spočetný charakter, ale pro každé $f \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ existuje posloupnost $(V_n)_{n=1}^\infty$ otevřených okolí f splňující $\{f\} = \bigcap_{n=1}^\infty V_n$.

Vhodné na referát: 1. - 6.

CVIČENÍ 5

1. Kvocient nezachová spočetný charakter:

a) Uvažujme kvocient prostoru $\mathbb{R}^2$ podle nejmenší ekvivalence $\sim$, pro kterou $(y, 0) \sim (y', 0)$ pro $y, y' \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pak bod $q(0, 0)$ nemá spočetný charakter v prostoru $\mathbb{R}^2 / \sim$.

b) Uvažujme kvocient prostoru $\mathbb{N} \times [0, 1]$ podle nejmenší ekvivalence $\sim$, pro kterou $(n, 0) \sim (m, 0)$ pro $n, m \in \mathbb{N}$. Rozhodněte, zda je tento prostor homeomorfní podprostoru roviny, který je tvořen všemi uzavřenými úsečkami spojujícími počátek s body $(1, 2^{-n})$, kde $n \in \mathbb{N}$.

2. Příklady prostorů, které nejsou normální:

a) S pomocí Tietzeho věty dokažte, že pokud separabilní Hausdorffův topologický prostor má uzavřený diskrétní podprostor mohutnosti kontinua, pak není normální. (Speciálně, uvědomte si že tedy Mrówka-Isbell space $\psi(\mathcal{A})$ není normální pokud $\mathcal{A}$ má mohutnost kontinua a také že tento argument lze použít k důkazu, že Niemytzkého rovina není normální.)

b) Nechť $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ je maximální skoro disjunkttní a $X := \psi(\mathcal{A})$ je Mrówka-Isbell space. Nalezněte pak explicitně zadanou reálnou funkci definovanou na uzavřené podmnožině X , kterou není možné rozšířit na celý prostor X . (Použijte k tomu znalosti o Mrówka-Isbell space, které známe z předchozích cvičení.)

Vhodné na referát: 1. - 2.

CVIČENÍ 6

1. Mezi spočetnou kompaktností a Lindelöfovskostí není žádný vztah: a) Dokažte, že $[0, \omega_1)$ je spočetně kompaktní prostor, který není Lindelöfův (a tedy ani kompaktní). b) Dokažte, že Sorgenfreyova přímka je Lindelöfův prostor, který není spočetně kompaktní (a tedy ani kompaktní).

2. Lindelöfovskost v metrizovatelných prostorech: Nechť X je metrizovatelný prostor. Dokažte, že X je separabilní, právě když je Lindelöfův. Platí tato ekvivalence i pro nemetrizovatelné prostory?

3. Kompaktnost neimplikuje sekvenciální kompaktnost: Nechť $|I| = 2^\omega$. Nalezněte v 2^I posloupnost, která nemá konvergentní podposloupnost. (Stále je ale 2^I kompaktní prostor dle Tichonovovy věty.)

4. Limita podle ultrafiltru v kompaktních prostorech: *Filtr* na množině X je soubor $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ splňující

- $\mathcal{F} \neq \emptyset, \emptyset \notin \mathcal{F}$,
- jsou-li $F_0, F_1 \in \mathcal{F}$, pak $F_0 \cap F_1 \in \mathcal{F}$,
- je-li $F \in \mathcal{F}$ a $F \subseteq G \subseteq X$, pak $G \in \mathcal{F}$.

Filtr $\mathcal{F}$ se nazývá *ultrafiltr*, pokud pro $A \cup B \in \mathcal{F}$ je $A \in \mathcal{F}$ nebo $B \in \mathcal{F}$.

a) Dokažte, že filtr je ultrafiltrem právě když se jedná o maximální filtr vzhledem k inkluzi a že pro každý filtr $\mathcal{F}$ existuje ultrafiltr $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}$.

b) Je-li $(x_i)_{i \in I}$ net v topologickém prostoru X a $\mathcal{F}$ je filtr na množině I , pak řekneme že $x \in X$ je limitou (x_i) podle filtru pokud pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$ platí $\{i \in I : x_i \in U\} \in \mathcal{F}$. Značíme $x = \lim_{\mathcal{F}} x_i$. Dokažte, že kdykoliv x je limitou $(x_i)_{i \in I}$ podle filtru $\mathcal{F}$ na množině I splňujícího $\{[i_0, \rightarrow) : i_0 \in I\} \subset \mathcal{F}$, pak x je hromadným bodem netu $(x_i)_{i \in I}$.

c) Dokažte, že X je kompaktní právě když pro každý net $(x_i)_{i \in I}$ a každý ultrafiltr $\mathcal{F}$ na množině I existuje $\lim_{\mathcal{F}} x_i$.

Vhodné na referát: 1. - 3., neco z 4.

CVIČENÍ 7

1. $\mathcal{C}_p([0, 1])$ je normální prostor: Dokažte postupně následující tvrzení.

a) Kdykoliv X je topologický prostor, pak $\mathcal{C}_p(X)$ je $T_{3\frac{1}{2}}$.

b) Dokažte, že pokud má topologický prostor X spočetný network, pak je Lindelöfův.

($\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ je *network*, pokud pro každé $x \in X$ a $U \in \mathcal{U}(x)$ existuje $N \in \mathcal{N}$ splňující $x \in N \subset U$).

c) Dokažte, že pokud (B_n) je spočetná báze $[0, 1]$ a (C_m) spočetná báze $\mathbb{R}$, pak konečné průniky množin

$$F(n, m) := \{f \in \mathcal{C}_p([0, 1]) : f(B_n) \subset C_m\}$$

tvorí spočetný network prostoru $\mathcal{C}_p([0, 1])$.

d) Z informací výše a věty z přednášky odvoďte, že $\mathcal{C}_p([0, 1])$ je normální prostor.

(Příklad výše se můžete pokusit zobecnit a dokázat, že kdykoliv K je metrizable kompaktní, pak $\mathcal{C}_p(K)$ je normální.)

2. Kompaktnost double arrow space: Řekněme, že lineárně uspořádaný prostor $(X, \leq)$ je *úplný svaz*, pokud každá (i prázdná) podmnožina $A \subset X$ má supremum a infimum. Dokažte:

a) $(X, \leq)$ je *úplný svaz* právě když každá (i prázdná) podmnožina $A \subset X$ má supremum.

(*Hint:* Dokažte, že $\inf A = \sup\{x \in X : x \leq a \text{ pro každé } a \in A\}$.)

b) Pokud $(X, \leq)$ není úplný svaz, pak uspořádaný topologický prostor X není kompaktní.

c) Pokud $(X, \leq)$, $(Y, \leq)$ jsou úplné svazy, pak $(X \times Y, \leq_{lex})$ je také úplný svaz (kde $\leq_{lex}$ je lexikografické uspořádání, tj. $(x, y) <_{lex} (x', y')$ právě když $x < x'$ nebo $x = x'$ a $y < y'$).

d) Odvoďte, že double arrow space je kompaktní prostor.

3. Spojité funkce na double arrow space: Necht' X je double arrow space (víme o něm již, že je kompaktní). Pro každé $t \in (0, 1)$ uvažujme funkci $f_t : X \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem $f_t((s, i)) = 0$ pokud $s < t$ nebo $(s, i) = (t, 0)$ a $f_t((s, i)) = 1$ pokud $s < t$ nebo $(s, i) = (t, 1)$. Položme $F := \{f_t : t \in (0, 1)\}$. Dokažte, že pak

a) $F \subset \mathcal{C}_p(X)$ b) $F \subset \mathcal{C}_p(X)$ je diskrétní podprostor c) $F \subset \mathcal{C}_p(X)$ je uzavřený

d) Odvoďte (s použitím výsledků z minulých cvičení), že $\mathcal{C}_p(X)$ není normální.

(Z předchozího cvičení pak vyplývá, že $\mathcal{C}_p(X)$ není Lindelöfův a nemá spočetný network.)

Vhodné na referát: 1., 2. (u úlohy 2. si můžete vybrat zda chcete řešit a) a b), nebo a) a c); d) je volitelně navíc), 3.

CVIČENÍ 8

- 1. Analogie Stone-Weierstrassovy věty pro topologii bodové konvergence:**
- a) Je pravda, že pro každou funkci $f \in C_p(\mathbb{R})$ existuje posloupnost polynomů $p_n \in C_p(\mathbb{R})$ že $p_n \rightarrow f$ v topologii bodové konvergence?
 - b) Je pravda, že pro každou funkci $f \in C_p(\mathbb{R})$ existuje posloupnost polynomů $p_n \in C_p(\mathbb{R})$ že $p_n \rightrightarrows f$?
 - c) Dokažte, že pokud X je Hausdorffův topologický prostor a $A \subset C_p(X)$ je okruh obsahující konstanty a odděluující body, pak A je husté v $C_p(X)$.

(*Hint:* Pro báze okolí dané konečnou množinou $F \subset X$ použijte Stone-Weierstrassovu větu v prostoru $\mathcal{C}(F)$.)

2. Jednobodová kompaktifikace Mrówka-Isbell space: Nechť $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ je soustava nekonečných podmnožin, která je maximální skoro disjunktní a nechť $X = \psi(\mathcal{A})$ je příslušný Mrówka-Isbell space. Dokažte:

- a) X je lokálně kompaktní (toto platí pro jakoukoliv $\mathcal{A}$ skoro disjunktní, ne nutně maximální). Označme pak $X_0 = X \cup \{\infty\}$ jeho jednobodovou kompaktifikaci.
- b) Podmnožina $A \subset X_0$ je uzavřená, právě když je *sekvenciálně uzavřená* (tj. limita každé konvergentní posloupnost sestávající z prvků množiny A je prvkem množiny A).
- c) Prostor X_0 není Fréchet-Urysohnův, tj. existuje bod x a množina $A \subset X_0$ splňující $x \in \overline{A}$ ale neexistuje posloupnost (x_n) prvků z A že $x_n \rightarrow x$ (v našem případě zvolte $x = \infty$ a $A = \mathbb{N}$).

(*Hint:* můžete se pokusit použít návod řešení dostupný zde:

<https://dantopology.wordpress.com/2024/08/01/a-compact-non-frechet-space-defined-using-almost-disjoint->

Poznámka: V roce 1980 prof. Petr Simon (dlouholetý přednášející kurzu Obecná topologie na MFF) publikoval článek, kde sestrojil první známý příklad Fréchet-Urysohnových prostorů X a Y , jejichž součin $X \times Y$ není Fréchet-Urysohnův. Tyto prostory byly sestrojeny jako dva různé Mrówka-Isbell space pro dvě vhodné maximální skoro disjunktní famílie $\mathcal{A}_1$ a $\mathcal{A}_2$.

3. Kompaktifikace Sorgenfreyovy přímky:

- a) Dokažte, že double arrow space, ze kterého odebereme body $(0, 0)$ a $(1, 1)$, je kompaktifikací Sorgenfreyovy přímky.
- b) Je Sorgenfreyova přímka lokálně kompaktní prostor?

4. Prostor $X := [0, \omega_1] \times [0, \omega]$ je normální, ale jeho podprostor $X \setminus \{(\omega_1, \omega)\}$ není normální.

5. Nechť S je Sorgenfreyova přímka. Pak S je normální, ale $S \times S$ není normální.

Vhodné na referát: aspoň dvě cvičení z 1., 2a + aspoň jeden z bodů 2b nebo 2c, 3.

CVIČENÍ 9

1. Čechova-Stoneova kompaktifikace diskrétního prostoru: Nechť I je množina a nechť K_I označuje množinu všech ultrafiltrů na I . Pro $A \subset I$ definujeme $U_A := \{\mathcal{U} \in K_I : A \in \mathcal{U}\}$. Dokažte následující tvrzení.

- Existuje jednoznačně určená topologie τ na K_I , jejíž báze topologie je $\{U_A : A \subset I\}$.
- Topologický prostor (K_I, τ) je T_2 a je také nuldimenzionální.
- (K_I, τ) je kompaktní.
- Množina všech obojetných množin v K_I je rovna $\{U_A : A \subset I\}$.
- Uvažujme na I diskrétní topologii a definujme zobrazení $e : I \rightarrow K_I$ předpisem $e(i) := \{A \subset I : i \in A\}$. Pak e je dobře definované a (e, K_I) je kompaktifikace diskrétního prostoru I .
- (e, K_I) je Čechova-Stoneova kompaktifikace diskrétního prostoru I .

(*Hint:* Dokažte že každou $f : I \rightarrow [0, 1]$ je možné spojitě rozšířit. Postupovat můžete například následujícím způsobem. Pro $\mathcal{U} \in K_I$ položte $\mathcal{A}_{\mathcal{U}} := \{f(A) : A \in \mathcal{U}\}$. Ověřte že $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ má konečnou průnikovou vlastnost a z kompaktnosti $[0, 1]$ pak zvolte $g(\mathcal{U}) \in \bigcap \mathcal{A}_{\mathcal{U}}$, tímto způsobem budete mít definováno $g : K_I \rightarrow [0, 1]$. Ukažte, že pak $g \circ e = f$. Bude zbývat dokázat spojitost g . To můžete provést například tak, že pro W' okolí bodu $g(\mathcal{U})$ zvolíte otevřené okolí W splňující $g(\mathcal{U}) \in W \subset \overline{W} \subset W'$, položíte $A := f^{-1}(W)$ a ukážete, že pak U_A je okolí bodu $\mathcal{U}$ splňující $g(U_A) \subset W'$.)

2. Prostor $\beta\mathbb{N}$: Můžete používat bez důkazu výsledek předchozího cvičení, který dává popis prostoru $\beta\mathbb{N}$ jako prostoru ultrafiltrů na $\mathbb{N}$. Dokažte následující.

- V prostoru $\beta\mathbb{N}$ neexistuje netriviální konvergentní posloupnost.
- Kdykoliv $W \subset \beta\mathbb{N}$ je otevřená množina, pak $\overline{W}$ je také otevřená. (*Hint:* položte $A := e^{-1}(W)$ a zkuste dokázat, že $\overline{W} = \overline{A}^{\beta\mathbb{N}} = U_A$.)
- Dokažte, že mohutnost $\beta\mathbb{N}$ je 2^{2^ω} . (*Hint:* uvažujte spojitě zobrazení spočetného diskrétního prostoru ω na spočetnou hustou množinu v kompaktu 2^{2^ω} . Toto zobrazení rozšířte na $\beta\mathbb{N} \rightarrow 2^{2^\omega}$ a ukažte, že jde o zobrazení na.)

Poznámka navíc: Můžete si zkusit rozmyslet, že obecně pro Hausdorffův prostor X platí $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$, příklad výše ukazuje že v této nerovnosti může nastat rovnost.

Vhodné na referát: aspoň tři cvičení z 1., 2a, 2b, 2c.

1. Normované lineární prostory, které ne/jsou úplně metrizable/Bairovy.

a) Necht' je dán normovaný lineární prostor X se spočetnou algebraickou dimenzí (tj. existují vektory (e_n) splňující $X = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$). Dokažte, že pak X není Bairův a tedy není úplně metrizable.

(Hint: Použijte známý fakt, že podprostory konečné dimenze jsou uzavřené.)

Jako důsledek odvoďte, že $P([0, 1]) := \{f \in C([0, 1]) : f \text{ je polynom}\} \subset C([0, 1])$ je normovaný lineární prostor, který není Bairův.

b) Je $C_p([0, 1])$ Bairův prostor?

c) Ukažte, že každý úplně metrizable normovaný lineární prostor je Banachův.

(Hint: Zvolte úplnění $\tilde{X}$ prostoru X a ukažte, že kdykoliv $x_0 \in \tilde{X}$ pak $(x_0 + X) \cap X \neq \emptyset$.)

d) Dokažte, že existuje normovaný lineární prostor, který není úplně metrizable ale je Bairův.

(Hint: V nekonečně-dimenzionálním Banachově prostoru X nalezněte algebraickou bázi B a z ní vyberte prostou posloupnost (e_n) . Pak ukažte, že existuje $k \in \mathbb{N}$ splňující že $Y := \text{span}(B \setminus \{e_n : n \geq k\})$ není první kategorie v X . Rozmyslete si, že $Y \subset X$ je hustý podprostor a proto není ani první kategorie v sobě. Uvědomte si, že $Y = \bigcup_n U_Y(0, n)$ a tedy ani žádná otevřená koule v Y není první kategorie v sobě, z čehož plyne že Y je Bairův.)

Vhodné na referát: 1a+1c, 1d

1. Dokažte, že $[0, 1]^{\omega_1}$ není G_δ podmnožina $[0, 2]^{\omega_1}$.

2. Sorgenfreyova přímka - čechovská úplnost a Bairův prostor.

a) Dokažte, že Sorgenfreyova přímka S není G_δ ve své kompaktifikaci D dané jako double arrow space bez bodů $(0, 0)$ a $(1, 1)$ (viz. cvičení 8.3).

(*Hint: Máme $S = (0, 1) \times \{1\} \subset D = (0, 1] \times \{0\} \cup [0, 1) \times \{1\}$. Pro $V \subset D$ otevřenou splňující $S \subset D$ dokažte, že $S(V) = \{x \in [0, 1] : (x, 0) \in V\}$ je otevřená hustá množina v úplném prostoru $[0, 1]$. Kdyby byla $S = \bigcap V_n$, pak s pomocí Bairovy věty dostaneme $x \in \bigcap_n S(V_n)$, pak ale $(x, 0) \in \bigcap_n V_n \setminus S$ což je spor.)*

b) Dokažte, že Sorgenfreyova přímka je Bairův prostor.

3. Dokažte, že $\mathbb{N}^{\omega_1}$ není čechovsky úplný prostor.

Vhodné na referát: 1, 2a, 2b, 3

DALŠÍ VHODNÁ CVIČENÍ

1. Funkcionálně otevřené a uzavřené množiny: Buď X topologický prostor. Množina $Z \subseteq X$ se nazývá *zero množina*, pokud existuje spojitá funkce $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že $Z = f^{-1}(\{0\})$. Množina $C \subseteq X$ se nazývá *cozero množina*, pokud existuje spojitá funkce $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že $C = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Dokažte následující tvrzení:

a) Doplněk cozero množiny je zero množina a v metrizableních prostorech jsou cozero množiny právě všechny otevřené.

b) Ukažte, že $C \subseteq X$ je cozero množina, právě když existuje spojitá funkce $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ a otevřená množina $G \subseteq \mathbb{R}$ tak, že $C = f^{-1}(G)$.

c) Spočetné sjednocení a konečný průnik cozero množin je cozero množina. Dejte příklad, že nekonečné sjednocení a nekonečný průnik cozero množin nemusí být cozero množina.

d) Dokažte, že každá zero množina je G_δ a pokud je X normální prostor, pak zero množiny splývají s uzavřenými množinami, které jsou G_δ .

2. Hellyho prostor: Označme $I = [0, 1]$ a necht' H je podprostor topologického součinu I^I , $\mathbb{H} = \{f \in I^I : f \text{ je neklesající}\}$. Dokažte: a) $\mathbb{H}$ je kompaktní b) Každá $f \in \mathbb{H}$ má spočetný charakter c) $\mathbb{H}$ je separabilní

d) $\mathbb{H}$ obsahuje nespočetný diskrétní podprostor (a tedy nemá spočetnou váhu a není metrizablelný)