

1. Uniformní prostory

1.1. Vztah k topologickým a metrickým prostorům

Poznámka. Pro množinu X označme diagonálu $\Delta(X) = \{(x, y) \in X^2 : x = y\}$. Inverzní relace k relaci E je relace $\{(x, y) : (y, x) \in E\}$. Pro binární relace C, D na množině X značíme jako $C \circ D = \{(x, z) \in X \times X : (x, y) \in C, (y, z) \in D \text{ pro nějaké } y \in X\}$.

Definice. Dvojice (X, \mathcal{D}) se nazývá *uniformní prostor* (UP), pokud X je množina a $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$ je neprázdný a splňuje:

$$(Ua) \quad \forall D \in \mathcal{D} : \Delta(X) \subseteq D,$$

$$(Ud) \quad \forall D \in \mathcal{D} : D^{-1} \in \mathcal{D},$$

$$(Ub) \quad \forall C, D \in \mathcal{D} : C \cap D \in \mathcal{D},$$

$$(Uc) \quad \text{je-li } D \in \mathcal{D} \text{ a } D \subseteq E, \text{ pak } E \in \mathcal{D},$$

$$(Ue) \quad \forall D \in \mathcal{D} \exists C \in \mathcal{D} : C \circ C \subseteq D.$$

Systém \mathcal{D} se nazývá *uniformita*. Prvky množiny \mathcal{D} se nazývají *okolí diagonály*. Uniformita \mathcal{D} se nazývá se separovaná, pokud navíc platí

$$(Uf) \quad \bigcap \mathcal{D} = \Delta(X). \text{ (Ekvivalentně, pro každé } x, y \in X, x \neq y \text{ existuje } D \in \mathcal{D}, \text{ že } (x, y) \notin D.)$$

Pokud je \mathcal{D} separovaná, pak řekneme, že uniformní prostor (X, \mathcal{D}) je T_1 .

Systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X^2)$ se nazývá *báze uniformity* (resp. *báze uniformity* \mathcal{D}), pokud uzavřením \mathcal{B} na nadmnožiny dostaneme nějakou uniformitu (resp. uniformitu \mathcal{D}). Systém $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X^2)$ se nazývá *subbáze uniformity* (resp. *subbáze uniformity* \mathcal{D}), pokud jeho uzavřením na konečné průniky dostaneme nějakou bázi uniformity (resp. nějakou bázi uniformity \mathcal{D}).

Pokud (X, \mathcal{D}) a (Y, \mathcal{E}) jsou uniformní prostory, pak řekneme že zobrazení $f: (X, \mathcal{D}) \rightarrow (Y, \mathcal{E})$ je *stejněměrně spojitě*, pokud $(f \times f)^{-1}(E) \in \mathcal{D}$ pro každé $E \in \mathcal{E}$. Zobrazení f se nazývá *uniformní homeomorfismus*, pokud f je bijekce, a f i f^{-1} jsou stejněměrně spojitá zobrazení.

Lemma 1. *Neprázdný systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X^2)$ tvoří bázi nějaké uniformity na X , právě když platí následující podmínky:*

$$(a) \quad \forall C \in \mathcal{B} : \Delta(X) \subseteq C,$$

$$(c) \quad \forall C \in \mathcal{B} \exists D \in \mathcal{B} : D \subseteq C^{-1},$$

$$(b) \quad \forall C, D \in \mathcal{B} \exists E \in \mathcal{B} : E \subseteq C \cap D,$$

$$(d) \quad \forall D \in \mathcal{B} \exists C \in \mathcal{B} : C \circ C \subseteq D.$$

Navíc, pokud je \mathcal{B} báze uniformity, pak je bázi separované uniformity právě když $\bigcap \mathcal{B} = \Delta(X)$.

Důkaz. Důkaz je snadný, byl vynechán, může být u zkoušky použit jakožto příklad navíc. \square

Příklady. • *Diskrétní uniformita* na množině X je tvořena všemi nadmnožinami $\Delta(X)$.

- Pokud (X, ρ) je pseudometrický prostor, položme $E_\rho(r) := \{(x, y) \in X \times X : \rho(x, y) < r\}$ pro $r > 0$. Pak $\{E_\rho(r) : r > 0\}$ je báze uniformity na X , která je bázi separované uniformity, pokud navíc ρ je metrika. Tuto uniformitu označujeme symbolem \mathcal{D}_ρ . Řekneme, že uniformita \mathcal{D} je *metrizovatelná*, pokud existuje metrika ρ splňující $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\rho$.

Je snadné se přesvědčit, že pokud (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, pak $f: (X, \rho) \rightarrow (Y, \sigma)$ je stejněměrně spojitě právě když je stejněměrně spojitě jakožto zobrazení mezi uniformními prostory (X, \mathcal{D}_ρ) a (Y, \mathcal{D}_σ) .

Definice. Pokud R je systém pseudometrik na množině X , pak *uniformita generovaná R* (značíme \mathcal{D}_R) je uniformita jejíž subbáze je $\{E_\rho(r) : r > 0, \rho \in R\}$.

Poznámka. Je snadné se přesvědčit, že pokud R je systém pseudometrik na množině X , pak \mathcal{D}_R je separovaná právě když R odděluje body X (tj. $\forall x \neq y \exists \rho \in R : \rho(x, y) > 0$). Dále, pokud je S systém pseudometrik na množině Y , pak $f : (X, \mathcal{D}_R) \rightarrow (Y, \mathcal{D}_S)$ je stejnoměrně spojitě právě když platí

$$\forall \rho \in S \forall \varepsilon > 0 \exists \sigma \in R \exists \delta > 0 \forall x, y \in X : \sigma(x, y) < \delta \implies \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Značení. Pro $E \subset X \times X$ a $x \in X$ značíme $E[x] := \{y \in X : (x, y) \in E\}$.

Tvrzení 2. Je-li (X, \mathcal{D}) uniformní prostor, pak

$$\tau_{\mathcal{D}} = \{A \subseteq X : \forall x \in A \exists D \in \mathcal{D} : D[x] \subseteq A\}$$

je topologie na X . Navíc platí následující.

- (a) Je-li \mathcal{B} báze uniformity \mathcal{D} , pak $\mathcal{B}(x) := \{D[x] : D \in \mathcal{B}\}$, $x \in X$ jsou báze okolí bodů v $(X, \tau_{\mathcal{D}})$.
- (b) \mathcal{D} je separovaná právě když $(X, \tau_{\mathcal{D}})$ je T_1 .
- (c) Je-li (Y, \mathcal{E}) uniformní prostor a $f : (X, \mathcal{D}) \rightarrow (Y, \mathcal{E})$ stejnoměrně spojitě, pak $f : (X, \tau_{\mathcal{D}}) \rightarrow (Y, \tau_{\mathcal{E}})$ je spojitě.
- (d) Je-li \mathcal{D} generovaná systémem pseudometrik R , pak pro každý net $(x_i)_{i \in I}$ a každé $x \in X$ platí, že $x_i \xrightarrow{\tau_{\mathcal{D}}} x$ právě když $\rho(x_i, x) \rightarrow 0$ pro každé $\rho \in R$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Definice. Topologický prostor (X, τ) je *uniformizovatelný*, pokud existuje uniformita \mathcal{D} splňující $\tau = \tau_{\mathcal{D}}$.

Lemma 3 (O pseudometrice). Ať (X, \mathcal{D}) je uniformní prostor a $\{D_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \subset \mathcal{D}$ splňují

- (i) $D_0 = X \times X$,
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N} : D_n = (D_n)^{-1}$,
- (iii) $\forall n \in \mathbb{N} : D_{n+1} \circ D_{n+1} \circ D_{n+1} \subseteq D_n$.

Pak existuje pseudometrika ρ na X splňující

- (a) $\forall n \geq 1 : \{(x, y) : d(x, y) < 2^{-n-1}\} \subseteq D_n \subseteq \{(x, y) : d(x, y) \leq 2^{-n}\}$,
- (b) $D_\rho \subset \mathcal{D}$ a $\rho \leq 1$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Důsledek 4. Každá uniformita je generovaná nějakým systémem pseudometrik. Každá T_1 uniformita je generovaná systémem pseudometrik, který odděluje body.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 5. T_1 uniformní prostor je metrizable, právě když má spočetnou bázi.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Poznámka. Spočetná báze \mathcal{D} je něco jiného, než spočetná báze $\tau_{\mathcal{D}}$. Příkladem je diskretní uniformita jejíž báze je tvořena jedním prvkem $\Delta(X)$, ale $\tau_{\mathcal{D}}$ je diskretní topologie a tedy váha $(X, \tau_{\mathcal{D}})$ je rovna $|X|$.

Věta 6. T_1 topologický prostor je uniformizovatelný, právě když je $T_{3\frac{1}{2}}$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

1.2. Podprostor, suma a součin

Definice. • Ať (X, \mathcal{D}) je uniformní prostor a $A \subset X$. Polož $\mathcal{D}|_A := \{D \cap (A \times A) : D \in \mathcal{D}\}$. Pak $(A, \mathcal{D}|_A)$ je *podprostor* (X, \mathcal{D}) .

- Ať (X_i, \mathcal{D}_i) jsou uniformní prostory. Pak *součin* uniformit je uniformita $\mathcal{D}_{\Pi_I X_i}$ na $\Pi_I X_i$, jejíž subbáze je $\{(\pi_i \times \pi_i)^{-1}(D) : i \in I, D \in \mathcal{D}_i\}$. Pak $(\Pi_I X_i, \mathcal{D}_{\Pi_I X_i})$ je *součin uniformních prostorů*.
- Ať (X_i, \mathcal{D}_i) jsou uniformní prostory. Pak na $\bigsqcup_I X_i := \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times X_i)$ definujeme *sumu* uniformit jako uniformitu $\bigsqcup_I \mathcal{D}_i := \{\bigcup_{i \in I} (\{i\} \times D_i) : D_i \in \mathcal{D}_i \text{ pro každé } i \in I\}$. Pak $(\bigsqcup_I X_i, \bigsqcup_I \mathcal{D}_i)$ je *suma uniformních prostorů*.

Poznámka. Je lehké ověřit, že suma/součin/podprostor uniformních prostorů je dobře definovaný uniformní prostor. Topologie generovaná uniformitou $\mathcal{D}|_A$ je topologie podprostoru, topologie generovaná uniformitou $\mathcal{D}_{\Pi_I X_i}$ je součinnová topologie.

Tvrzení 7. *Nechť (Z, \mathcal{D}) a (X_i, \mathcal{D}_i) pro $i \in I$ jsou uniformní prostory.*

- Zobrazení $f : Z \rightarrow \Pi_I X_i$ je stejnoměrně spojitě, právě když jsou stejnoměrně spojitá zobrazení $\pi_i \circ f$ pro každé $i \in I$.*
- Ať $f_i : X_i \rightarrow (Y_i, \mathcal{E}_i)$, $i \in I$ jsou stejnoměrně spojitá zobrazení. Pak je stejnoměrně spojitě také zobrazení $\Pi_I f_i : \Pi_I X_i \rightarrow \Pi_I Y_i$.*
- Ať $f_i : Z \rightarrow X_i$, $i \in I$ jsou stejnoměrně spojitá zobrazení. Pak je stejnoměrně spojitě také zobrazení $\Delta_I f_i : Z \rightarrow \Pi_I X_i$.*
- Jsou-li $f, g : Z \rightarrow \mathbb{R}$ stejnoměrně spojitá zobrazení, pak jsou stejnoměrně spojitá také zobrazení $f + g$, $f - g$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ a $|f|$. Navíc, pokud jsou f, g omezené funkce, pak je stejnoměrně spojitě také zobrazení $f \cdot g$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

konec 1. přednášky (19. 2. 2026)

1.3. Úplnost a totální omezenost

Definice. • Net $(x_i)_{i \in I}$ v uniformním prostoru (X, \mathcal{D}) se nazývá *cauchyovský*, pokud pro každé $D \in \mathcal{D}$ existuje $i_0 \in I$ že pro $i, j \geq i_0$ je $(x_i, x_j) \in D$.

- Uniformní prostor (X, \mathcal{D}) se nazývá *úplný*, pokud každý cauchyovský net je konvergentní v $(X, \tau_{\mathcal{D}})$.
- Uniformní prostor (X, \mathcal{D}) se nazývá *totálně omezený*, pokud pro každé $E \in \mathcal{D}$ existuje $K \subseteq X$ konečná, že $E[K] = X$. (Kde $E[K] := \bigcup_{x \in K} E[x]$.)

Poznámka. Je-li uniformita \mathcal{D} generovaná systémem pseudometrik R , pak net (x_i) je cauchyovský v (X, \mathcal{D}) právě když platí

$$\forall \rho \in R \forall \varepsilon \exists i_0 \forall i, j \geq i_0 : \rho(x_i, x_j) < \varepsilon.$$

Poznámka. Není složité si rozmyslet, že v úplném metrickém prostoru jsou cauchyovské nety konvergentní. Dále se pak už snadno nahlédne, že metrický prostor (X, ρ) je úplný (resp. totálně omezený), právě když uniformní prostor (X, \mathcal{D}_ρ) je úplný (resp. totálně omezený).

Poznámka. Ať (X, \mathcal{D}) je uniformní prostor. Je snadné ověřit, že konvergentní nety v $(X, \tau_{\mathcal{D}})$ jsou cauchyovské v (X, \mathcal{D}) a že stejnoměrně spojitá zobrazení zobrazí cauchyovský net na cauchyovský net.

Tvrzení 8. *At (X, \mathcal{D}) je T_1 uniformní prostor. Pak*

X je totálně omezený \Leftrightarrow každý net v X má cauchyovský podnet.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 9. *(i) Je-li podprostor úplného T_1 uniformního prostoru úplný, pak je uzavřený.*

(ii) Podprostor totálně omezeného (resp. uzavřený podprostor úplného) uniformního prostoru je totálně omezený (resp. úplný).

(iii) Součin totálně omezených (resp. úplných) uniformních prostorů je totálně omezený (resp. úplný).

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 10. *At X je T_1 uniformní prostor. Pak $(X, \tau_{\mathcal{D}})$ je kompaktní, právě když (X, \mathcal{D}) je úplný a totálně omezený.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 11. *At X a Y jsou uniformní T_1 prostory, Y je úplný, $A \subset X$ a $f : A \rightarrow Y$ je stejnoměrně spojitý. Pak existuje $F : \overline{A} \rightarrow Y$ stejnoměrně spojitě splňující $F|_A = f$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Definice. Necht (X, \mathcal{D}) je T_1 uniformní prostor. Jeho *zúplněním* je dvojice (e, Y) , kde Y je úplný T_1 uniformní prostor a $e : X \rightarrow Y$ je uniformní vnoření na hustou část (tj. $e(\overline{X}) = Y$ a $e : X \rightarrow e(X)$ je uniformní homeomorfismus).

Věta 12. *Každý T_1 uniformní prostor má zúplnění. Navíc, pokud (e, Y) a (e', Y') jsou zúplnění T_1 uniformního prostoru X , pak existuje uniformní homeomorfismus $F : Y \rightarrow Y'$ splňující $F \circ e = e'$.*

Důkaz. Důkaz byl vynechán, zkoušen nebude. □

1.4. Uniformita na kompaktech

Věta 13. *Necht (X, τ) je Hausdorffův kompaktní prostor. Pak na X existuje právě jedna uniformita generující topologii τ , báze této jediné uniformity je tvořena otevřenými okolími diagonály $\Delta(X)$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 14. *At (X, \mathcal{D}) , (Y, \mathcal{E}) jsou T_1 uniformní prostory a $(X, \tau_{\mathcal{D}})$ je kompaktní. Pak každé spojitě zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je stejnoměrně spojitý.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

2. Topologické grupy

Definice. (G, \cdot, τ) se nazývá *topologická grupa* (TG), pokud (G, \cdot) je grupa, (G, τ) je topologický prostor a operace násobení $\cdot : G \times G \rightarrow G$ (na $G \times G$ uvažujeme součinnou topologii) a operace inverzního prvku $^{-1} : G \rightarrow G$ jsou spojité.

Příklady. Příklady topologických grup jsou například následující.

- (a) Každá grupa s diskretní topologií.
- (b) Každý normovaný lineární prostor s operací sčítání a topologií generovanou normou. Obecněji, každý topologický vektorový prostor je komutativní topologická grupa.
- (c) $GL(n, \mathbb{R})$ (grupa všech reálných invertibilních $n \times n$ matic). Grupová operace je dána násobením matic, topologie je dána konvergencí po souřadnicích (tj. topologie je zděděná ze součinné topologie na $\mathbb{R}^{n \times n}$).

konec 2. přednášky (26. 2. 2026)

konec 3. přednášky (5. 3. 2026)

- (d) $\text{Iso}(X)$, kde (X, ρ) je metrický prostor. Symbolem $\text{Iso}(X)$ označujeme množinu všech surjektivních isometrií $f : X \rightarrow X$ s grupovou operací skládání a topologií bodové konvergence (tj. se součinnou topologií zděděnou z X^X).

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

- (e) $\text{Iso}(V)$, kde $(V, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Symbolem $\text{Iso}(V)$ zde označujeme množinu všech surjektivních lineárních isometrií $f : X \rightarrow X$ s grupovou operací skládání a topologií bodové konvergence (tj. se součinnou topologií zděděnou z V^V).
- (f) $H(K)$, kde K je kompaktní Hasdorffův prostor. Symbolem $H(K)$ zde označujeme množinu všech surjektivních homeomorfismů $f : K \rightarrow K$ s grupovou operací skládání a *compact-open* topologií, tj. topologií jejíž subbáze je tvořena množinami $E[L; U] := \{f \in H(K) : f(L) \subset U\}$, kde $L \subset K$ je kompaktní a $U \subset K$ je otevřená množina.
(Důkaz, že se jedná o topologickou grupu viz. cvičení.)

Neutrální prvek topologické grupy G značíme písmenem e_G (nebo jen e pokud je z kontextu jasné o jakou grupu G se jedná). Připomeňme, že podgrupa $N \subset G$ je *normální podgrupa* (píšeme $N \triangleleft G$), pokud $gNg^{-1} = N$ pro každé $g \in G$ (neplést si s nesouvisejícím pojmem normálního topologického prostoru). Dále připomeňme, že pro $N \triangleleft G$ můžeme definovat *faktorgrupu* G/N , tj. grupu jejíž prvky jsou rozkladové třídy tvaru $xN := \{xn : n \in N\}$ a grupová operace je definována přirozeným způsobem jako $(xN)(yN) = (xy)N$ a $(xN)^{-1} = x^{-1}N$.

Pro každé $g \in G$ definujeme zobrazení levé translace $L_g : G \rightarrow G$ a zobrazení pravé translace $R_g : G \rightarrow G$ předpisy $L_g(h) = gh$ a $R_g(h) = hg$ pro $h \in G$. Topologický prostor X je *homogenní*, pokud pro každé $x, y \in X$ existuje homeomorfismus $f : X \rightarrow X$ splňující $f(x) = y$.

Lemma 15. *Nechť G je topologická grupa. Pak platí následující.*

- (a) Zobrazení $^{-1} : G \rightarrow G$ je homeomorfismus.
- (b) Pro každé $g \in G$ jsou zobrazení levé a pravé translace L_g a R_g homeomorphy na G .
- (c) G je homogenní prostor.

- (d) $\forall U \in \mathcal{U}(e) \exists V \in \mathcal{U}(e) : V \cdot V^{-1} \subset U$.
- (e) Je-li jedna z množin $A, B \subset G$ otevřená, pak $A \cdot B$ je otevřená.
- (f) Je-li $H \subset G$ (normální) podgrupa, pak \overline{H} je (normální) podgrupa.
- (g) Je-li $H \subset G$ podgrupa a $\text{Int}(H) \neq \emptyset$, pak H je obojetná.
- (h) Součin topologických grup se součinnovou topologií je topologická grupa.
- (i) Homomorfismus topologických grup $f : G \rightarrow H$ je spojitý, právě když je spojitý v neutrálním prvku e_G .

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

2.1. Uniformity na topologických grupách

Definice. Nechť G je topologická grupa. Pak

- *pravá uniformita* na G je uniformita \mathcal{D}_R , jejíž báze je dána systémem $\{R_U : U \in \mathcal{U}(e)\}$, kde $R_U := \{(x, y) : xy^{-1} \in U\}$ pro $U \in \mathcal{U}(e)$,
- *levá uniformita* na G je uniformita \mathcal{D}_L , jejíž báze je dána systémem $\{L_U : U \in \mathcal{U}(e)\}$, kde $L_U := \{(x, y) : x^{-1}y \in U\}$ pro $U \in \mathcal{U}(e)$.

Lemma 16. Nechť (G, \cdot, τ) je topologická grupa. Pak $\tau = \tau_{\mathcal{D}_R} = \tau_{\mathcal{D}_L}$ (tj. topologie generovaná pravou uniformitou je topologie grupy). Navíc, zobrazení $R_g : (G, \mathcal{D}_R) \rightarrow (G, \mathcal{D}_R)$ a $L_g : (G, \mathcal{D}_L) \rightarrow (G, \mathcal{D}_L)$ jsou uniformní homeomorfismy pro každé $g \in G$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 17. Každá T_1 topologická grupa je $T_{3\frac{1}{2}}$. Navíc, T_1 topologická grupa je metrizovatelná, právě když má spočetný charakter.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Lemma 18 (O zprava/zleva invariantní pseudometrice). Nechť (G, \cdot, τ) je topologická grupa a $\{U_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \subset \mathcal{U}(e)$ splňují

- (i) $U_0 = G$, (iii) $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} \cdot U_{n+1} \cdot U_{n+1} \subseteq U_n$.
(ii) $\forall n \in \mathbb{N} : U_n = (U_n)^{-1}$,

Pak existuje zprava invariantní (resp. zleva invariantní) pseudometrika ρ na G splňující $\rho \leq 1$,

- (a) $\forall n \geq 1 : B_\rho(e, 2^{-n-1}) \subseteq U_n \subseteq \overline{B}_\rho(e, 2^{-n})$,
(b) $\mathcal{D}_\rho \subset \mathcal{D}_R$ (resp. $\mathcal{D}_\rho \subset \mathcal{D}_L$).

Navíc, pokud na grupě G splývá levá a pravá uniformita, pak existuje dokonce bi-invariantní pseudometrika ρ s vlastnostmi výše.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 19 (Birkhoff-Kakutani). Každá metrizovatelná topologická grupa je metrizovatelná zprava invariantní (resp. zleva invariantní) metrikou.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Definice. Řekneme, že topologická grupa je SIN (Small Invariant Neighborhoods) pokud na ní existuje \mathcal{B} báze okolí e splňující že $gUg^{-1} \subset U$ pro každé $U \in \mathcal{B}$ a $g \in G$.

Tvrzení 20. Topologická grupa je SIN právě když na ní splývá levá a pravá uniformita.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 21. *Metrizovatelná grupa je SIN právě když je metrizovatelná bi-invariantní metrikou.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Příklady. Typickými příklady SIN topologických grup jsou kompaktní grupy, diskrétní grupy a komutativní grupy. Příkladem metrizovatelné topologické grupy, která není SIN je $GL(n, \mathbb{R})$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

2.2. Kvocient topologických grup

Věta 22. *Nechť G je topologická grupa a $N \triangleleft G$. Na G/H uvažujme kvocientovou topologii induktivně generovanou zobrazením $\pi : G \rightarrow G/H$. Pak G/H je topologická grupa a π je otevřený homomorfismus. Navíc, G/H je T_1 právě když H je uzavřená (bez ohledu na to, zda G je T_1).*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 23. *Nechť G je T_1 topologická grupa a $H \subset G$ lokálně kompaktní podgrupa. Pak H je uzavřená.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

2.3. Reprezentace topologických grup

Definice. Nechť G je T_1 topologická grupa. Řekneme, že funkce $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ je zprava stejnoměrně spojitá, pokud f je stejnoměrně spojitá jakožto funkce z (G, \mathcal{D}_R) do \mathbb{R} . Množinu všech omezených zprava stejnoměrně spojitých funkcí $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ označujeme jako $RUC(G)$.

konec 4. přednášky (12.3.2026)

Lemma 24. *Nechť G je T_1 topologická grupa. Pak $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ je zprava stejnoměrně spojitá právě když*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists U \in \mathcal{U}(e) \forall u \in U \forall x \in G : |f(ux) - f(x)| < \varepsilon.$$

Pokud $RUC(G)$ vybavíme normou $\|f\|_\infty := \sup_{x \in G} |f(x)|$, pak $(RUC(G), \|\cdot\|_\infty)$ je Banachův prostor. Navíc, $RUC(G)$ odděluje body a uzavřené množiny v G .

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 25 (Teľman). *Nechť G je T_1 topologická grupa. Pak existuje Banachův prostor V takový, že G se vnořil jakožto topologická grupa do $\text{Iso}(V)$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

konec 5. přednášky (19.3.2026)

3. Parakompaktní prostory

Definice. Je-li X množina a \mathcal{U} její pokrytí, pak systém \mathcal{V} nazýváme *zjemněním* \mathcal{U} (značíme $\mathcal{V} < \mathcal{U}$), pokud \mathcal{V} je pokrytí X a pro každé $V \in \mathcal{V}$ existuje $U \in \mathcal{U}$, že $V \subseteq U$.

Dále, nechť X je topologický prostor a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Systém \mathcal{S} se nazývá

- *lokálně konečný*, pokud každý bod v X má okolí protínající jen konečně mnoho množin z \mathcal{S} ,
- *diskrétní*, pokud každý bod v X má okolí protínající nejvýše jednu množinu z \mathcal{S} ,
- *σ -lokálně konečný* (resp. *σ -diskrétní*), pokud je spočteným sjednocením lokálně konečných (resp. diskrétních) systémů.

Poznámky. Každý (σ -)diskrétní systém je (σ -)lokálně konečný. Systém $\{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ je σ -diskrétní, ale není lokálně konečný.

Fakt 26 (Uzávěr lokálně konečného souboru). *Je-li \mathcal{A} lokálně konečný soubor v topologickém prostoru X , pak $\{\bar{A} : A \in \mathcal{A}\}$ je lokálně konečný a $\overline{\bigcup \mathcal{A}} = \bigcup \{\bar{A} : A \in \mathcal{A}\}$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Definice. Hausdorffův topologický prostor X se nazývá *parakompaktní*, pokud každé jeho otevřené pokrytí má lokálně konečné otevřené zjemnění.

Příklady. Všechny kompaktní a všechny diskrétní prostory jsou parakompaktní. (Později dokážeme, že také každý metrický prostor je parakompaktní.)

Věta 27 (Charakterizace parakompaktnosti). *Pro T_3 topologický prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.*

- (a) X je parakompaktní.
- (b) Každé otevřené pokrytí X je zjemňováno σ -lokálně konečným otevřeným pokrytím.
- (c) Každé otevřené pokrytí X je zjemňováno lokálně konečným pokrytím.
- (d) Každé otevřené pokrytí X zjemňováno lokálně konečným uzavřeným pokrytím.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Důsledek 28. *Každý Lindelöfův T_3 prostor je parakompaktní.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Definice. Pro systém \mathcal{S} podmnožin množiny X a $x \in X$ definujeme $st_{\mathcal{S}}(x) = \bigcup \{S \in \mathcal{S} : x \in S\}$. Říkáme, že pokrytí \mathcal{V} *hvězdovitě zjemňuje* \mathcal{U} (píšeme $\mathcal{V} <_{st} \mathcal{U}$), pokud $\{st_{\mathcal{V}}(x) : x \in X\}$ zjemňuje \mathcal{U} .

Věta 29 (Charakterizace parakompaktnosti II). *Pro Hausdorffův topologický prostor (X, τ) jsou následující podmínky ekvivalentní.*

- (a) Každé otevřené pokrytí \mathcal{U} prostoru X má otevřené hvězdovité zjemnění, které je pokrytím.
- (b) Existuje uniformita \mathcal{D} na X generující topologii X (tj. $\tau_{\mathcal{D}} = \tau$) taková, že pro každé otevřené pokrytí \mathcal{U} prostoru X existuje $D \in \mathcal{D}$ splňující $\{D[x] : x \in X\} < \mathcal{U}$.
- (c) X je $T_{3\frac{1}{2}}$ a pro každé otevřené pokrytí \mathcal{U} prostoru X existuje spojitá pseudometrika ρ na X splňující $\{B_{\rho}(x, 1) : x \in X\} < \mathcal{U}$
- (d) X je $T_{3\frac{1}{2}}$ a každé otevřené pokrytí X je zjemňováno σ -diskrétním otevřeným pokrytím.

(e) X je parakompaktní.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

konec 6. přednášky (26. 3. 2026)

Definice. Hausdorffův topologický prostor X se nazývá *kolektivně normální*, pokud pro každý diskrétní systém \mathcal{F} z uzavřených množin existuje systém disjunktních otevřených množin $\{U(F) : F \in \mathcal{F}\}$ splňující $F \subset U(F)$ pro každé $F \in \mathcal{F}$.

Poznámka. Pokud je systém uzavřených množin konečný, pak je diskrétní právě když je disjunktní. Speciálně, každý kolektivně normální prostor je i normální.

Tvrzení 30. *Každý parakompaktní topologický prostor je kolektivně normální, a tedy normální.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 31 (Stone). *Každý metrizovatelný topologický prostor je parakompaktní.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Definice. Nechť \mathcal{G} je otevřené pokrytí prostoru X . Soubor spojitých funkcí $\{f_i : X \rightarrow [0, 1] : i \in I\}$ se nazývá *lokálně konečný rozklad jedničky podřízený \mathcal{G}* , jestliže soubor $\{\{f_i \neq 0\} : i \in I\}$ je lokálně konečný, zjemňuje \mathcal{G} a $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$ pro každé $x \in X$.

Věta 32 (Rozklad jednotky). *V parakompaktním topologickém prostoru existuje ke každému otevřenému pokrytí lokálně konečný rozklad jednotky podřízený tomuto pokrytí.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 33 (Dugundji - speciální případ). *Nechť K je metrizovatelný kompaktní a $L \subset K$ jeho uzavřená podmnožina. Pak existuje lineární zobrazení $E : C(L) \rightarrow C(K)$ splňující $Ef|_L = f$ a $\|Ef\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ pro každé $f \in C(L)$. Navíc, $Ef \geq 0$ kdykoliv $f \geq 0$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

konec 7. přednášky (2. 4. 2026)

Věta 34 (Bing, Nagata, Smirnov). *Pro $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor X je ekvivalentní.*

- (a) X je metrizovatelný.
- (b) X má σ -diskrétní bázi.
- (c) X má σ -lokálně konečnou bázi.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

4. Souvislost

Definice. Topologický prostor se nazývá *souvislý*, pokud ho nelze vyjádřit jako disjunktní sjednocení dvou neprázdných otevřených množin.

Poznámka. Existují ještě pojmy křivkové souvislosti a obloukové souvislosti, v této přednášce se těmito pojmy ale věnovat blíže nebudeme.

Poznamenejme, že někteří autoři (např. Engelking) považují prázdnou množinu za souvislou, někteří ne.

Tvrzení 35. Pro topologický prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.

- (a) Prostor X je souvislý.
- (b) Je-li $X = A \cup B$ a $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$, pak $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$.
- (c) Prostor X neobsahuje vlastní obojetnou podmnožinu.
- (d) Každé spojitě zobrazení $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ je konstantní (kde $\{0, 1\}$ je dvoubodový diskretní prostor).

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 36. Spojitý obraz souvislého prostoru je souvislý.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 37 (Sjednocení souvislých množin). *Nechť $\{C_i: i \in I\}$ je soubor souvislých podmnožin prostoru X a nechť je splněna jedna z následujících podmínek:*

- (a) $\exists i_0 \in I \forall i \in I: C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset;$
- (b) $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset.$

Pak $\bigcup C_i$ je souvislá.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Důsledek 38. Je-li X topologický prostor, $A \subseteq X$ souvislá a $A \subseteq M \subseteq \overline{A}$, pak M je souvislá.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 39. *Nechť X je $T_{3\frac{1}{2}}$ topologický prostor. Pak X je souvislý, právě když βX je souvislý.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 40. *Nechť $X_i, i \in I$ jsou neprázdné topologické prostory. Pak $\prod_I X_i$ je souvislý, právě když jsou všechny prostory $X_i, i \in I$ souvislé.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Definice. Je-li X topologický prostor a $x \in X$, pak *komponenta souvislosti* bodu x je největší souvislá množina, která obsahuje bod x . Značíme ji C_x .

Poznámka. Díky Tvrzení 37 existuje komponenta souvislosti každého bodu. Jsou-li C_x a C_y dvě komponenty, pak $C_x = C_y$ nebo $C_x \cap C_y = \emptyset$. Tedy komponenty souvislosti tvoří rozklad prostoru X .

Tvrzení 41. *Jsou-li $X_i, i \in I$ topologické prostory a $x = (x_i) \in \prod_I X_i$, pak $C_x = \prod_I C_{x_i}$. (Tj. komponenta $x = (x_i)$ je součin komponent příslušných $x_i, i \in I$.)*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Definice. Buď X topologický prostor. Množina Q se nazývá *kvazikomponentou* v bodě x , pokud $Q = \bigcap \{Z : x \in Z, Z \text{ je obojetná}\}$. Značíme ji Q_x .

Poznámka. Pro každé $x \in X$ platí, že $C_x \subseteq Q_x$. Kvazikomponenty jsou uzavřené, protože jsou definované jako průniky uzavřených množin. Kvazikomponenty navíc opět tvoří rozklad prostoru.

Příklad. Ať X je podmnožina roviny tvořená body $a = (0, 0), b = (0, 1)$ a spočetným systémem úseček spojujících body $(2^{-n}, 0)$ a $(2^{-n}, 1)$. Pak $C_a = \{a\} \neq \{a, b\} = Q_a$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Lemma 42 (O průniku v kompaktu). *Buď X kompaktní prostor a \mathcal{A} soubor uzavřených množin. Pokud $\bigcap \mathcal{A} \subseteq U$ pro nějakou U otevřenou, pak existuje konečný systém $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, že $\bigcap \mathcal{F} \subseteq U$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 43. *V kompaktním T_2 prostoru komponenty a kvazikomponenty splývají.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

4.1. Kontinua

Definice. Kompaktní souvislý neprázdný T_2 prostor se nazývá *kontinuum*. Je-li tvořeno jediným bodem, nazývá se *degenerované*.

Poznámka. Spojité obrazy a libovolné součiny kontinuí jsou kontinua.

Tvrzení 44. *Je-li \mathcal{H} soubor kontinuí uzavřený na konečné průniky, pak $\bigcap \mathcal{H}$ je kontinuum. (Speciálně průnik klesající posloupnosti kontinuí je kontinuum.)*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 45 (Bum do hranice). *Je-li A vlastní uzavřená podmnožina kontinua X , pak každá komponenta množiny A protíná hranici A .*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 46 (Sierpinski). *Buď X kontinuum a $X_n, n \in \mathbb{N}$, po dvou disjunktní uzavřené podmnožiny, jejichž sjednocením je X . Pak $X_n = \emptyset$ pro všechna n až na jedno.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

konec 8. přednášky (9. 4. 2026)

Definice. Kontinuum se nazývá *rozložitelné*, pokud existují dvě vlastní podkontinua, jejichž je sjednocením. V opačném případě se nazývá *nerozložitelné*.

Příklad. V \mathbb{R}^2 existuje nerozložitelné kontinuum.

konec 9. přednášky (16. 4. 2026)

4.2. Nesouvislost

Definice. Hausdorffův topologický prostor X se nazývá

- *dědičně nesouvislý*, pokud komponenty jsou jednobodové;
- *totálně nesouvislý*, pokud pro $x \neq y$ existuje obojetná $Z \subseteq X$, že $x \in Z$, $y \notin Z$;
- *nuldimenzionální* (píšeme někdy 0-dim), pokud má bázi tvořenou obojetnými množinami;
- *silně nuldimenzionální* (píšeme někdy *silně* 0-dim), pokud pro každé dvě disjunktní uzavřené množiny E, F existuje obojetná Z , že $E \subseteq Z \subseteq X \setminus F$.

Poznámky. • Terminologie není úplně jednotná, používáme terminologii z Engelkinga (ve skriptech zvolena jiná terminologie). Nejpodstatnějším pojmem bude nuldimenzionalita (tam terminologie jednotná je).

- Námi definovaná silná nuldimenzionalita implikuje automaticky normalitu, ale lze ji přirozeně definovat rozumným způsobem už v Tichonovových prostorech (blíže viz. například skripta).

Tvrzení 47. *Nechť X je T_2 topologický prostor. Pak platí*

$$X \text{ je silně } 0\text{-dim} \implies X \text{ je } 0\text{-dim} \implies X \text{ je totálně nesouvislý} \implies X \text{ je dědičně nesouvislý.}$$

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Příklady. • Uvažujme $X = \mathbb{R}^2$ s topologií τ určenou takto: body \mathbb{Q}^2 jsou izolované, ostatní body x mají bázová okolí $\{x\} \cup (B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}^2)$ pro $\varepsilon > 0$. Pak (X, τ) je T_2 prostor, který je dědičně nesouvislý a není totálně nesouvislý.

Existuje i metrizovatelný příklad, ten je ale o dost složitější (viz. skripta, Příklad 8.46).

- Uvažujme Erdősův prostor, tj. $E := \ell_2 \cap \mathbb{Q}^\omega$ s topologií zděděnou z ℓ_2 . Pak E je metrizovatelný totálně nesouvislý prostor, který není nuldimenzionální.
- Příklady prostorů, který jsou nuldimenzionální a nejsou normální (tedy ani silně nuldimenzionální podle naší definice) byly už zmíněny v Obecné topologii 1 (součin Sorgenfreyovy přímky, nebo Isbel-Mrówka space).
- Na cvičení si ukážeme příklad normálního prostoru, který je nuldimenzionální ale není silně nuldimenzionální. Dokonce existuje i metrizovatelný příklad, ten je ale velmi komplikovaný.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 48 (Nesouvislost v kompaktu). *Pro T_2 kompaktní prostor X platí:*

$$X \text{ je silně } 0\text{-dim} \Leftrightarrow X \text{ je } 0\text{-dim} \Leftrightarrow X \text{ je totálně nesouvislý} \Leftrightarrow X \text{ je dědičně nesouvislý.}$$

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 49 (Nuldimenzionalita βX). *Ať X je T_4 . Pak βX je 0-dim , právě když X je silně 0-dim .*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 50. *Nechť X je T_2 . Pak je nuldimenzionální, právě když jej lze vnořit do 2^I pro nějakou množinu I . V takovém případě lze zvolit $I = w(X)$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 51. *Každý T_2 kompaktní obrazem nuldimenzionálního kompaktního prostoru stejné váhy.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

5. Topologická dimenze

Definice (Malá induktivní dimenze: Menger, Urysohn). Pro T_3 prostor X definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ jeho malou induktivní dimenzi induktivně takto:

- Řekneme, že $\text{ind } X = -1$, právě když $X = \emptyset$.
- $\text{ind } X \leq n$ jestliže pro každé $x \in X$ a U okolí x existuje otevřená V , že $x \in V \subseteq U$ a $\text{ind}(\partial V) \leq n - 1$.
- $\text{ind } X = n$, pokud $\text{ind } X \leq n$ a neplatí $\text{ind } X \leq n - 1$.
- $\text{ind } X = \infty$, pokud $\text{ind } X \leq n$ neplatí pro žádné $n \in \mathbb{N}$.

Říkáme, že $\text{ind } X$ je *malá induktivní dimenze* prostoru X .

Poznámky. Nechť X je T_3 prostor. Pak platí:

- $\text{ind } X \leq 0$, právě když X je nuldimenzionální;
- pokud $M \subset X$, pak $\text{ind } M \leq \text{ind } X$;
- $\text{ind}[0, 1] = 1$.

Definice (Velká induktivní dimenze: Brouwer, Čech). Pro T_4 prostor X definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ jeho velkou induktivní dimenzi induktivně takto:

- Řekneme, že $\text{Ind } X = -1$, právě když $X = \emptyset$.
- $\text{Ind } X \leq n$ jestliže pro každou uzavřenou E a otevřenou $U \supseteq E$ existuje otevřená V , že $E \subseteq V \subseteq U$ a $\text{Ind}(\partial V) \leq n - 1$.
- $\text{Ind } X = n$, pokud $\text{Ind } X \leq n$ a neplatí $\text{Ind } X \leq n - 1$.
- $\text{Ind } X = \infty$, pokud $\text{Ind } X \leq n$ neplatí pro žádné $n \in \mathbb{N}$.

Říkáme, že $\text{Ind } X$ je *velká induktivní dimenze* prostoru X .

Poznámky. Nechť X je T_4 prostor. Pak platí:

- pokud $M \subset X$ je uzavřená, pak $\text{Ind } M \leq \text{Ind } X$;
- $\text{Ind } X \leq 0$, právě když X je silně nuldimenzionální;
- $\text{ind } X \leq \text{Ind } X$;
- $\text{Ind}[0, 1] = 1$.

Definice. Říkáme, že systém \mathcal{A} podmnožin množiny X je řádu n , pokud n je největší přirozené číslo, pro které existují různé prvky $A_1, \dots, A_{n+1} \in \mathcal{A}$, že $\bigcap A_i \neq \emptyset$.

Definice (Pokrývací dimenze: Čech, Lebesgue). Pro T_4 prostor X definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ jeho pokrývací dimenzi induktivně takto:

- $\dim \emptyset = -1$.
- $\dim X \leq n$ jestliže každé konečné otevřené pokrytí X je zjemněno konečným otevřeným pokrytím řádu nejvýše n .
- $\dim X = n$, pokud $\dim X \leq n$ a neplatí $\dim X \leq n - 1$.
- $\dim X = \infty$, pokud $\dim X \leq n$ neplatí pro žádné n .

Říkáme, že $\dim X$ je *pokrývací dimenze* prostoru X .

Poznámky. Nechť X je T_4 prostor. Pak platí:

- pokud $M \subset X$ je uzavřená, pak $\dim M \leq \dim X$;
- $\dim[0, 1] = 1$.

konec 10. přednášky (23. 4. 2026)

Tvrzení 52. V T_4 topologickém prostoru X platí, že $\dim X \leq 0$ právě když X je silně 0-dim.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Definice. Ať X je množina a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ pokrytí množiny X . Indexovaný systém $\{T_S : S \in \mathcal{S}\}$ se nazývá *skrčení* systému \mathcal{S} , pokud je to pokrytí a $T_S \subseteq S$ pro $S \in \mathcal{S}$.

Lemma 53 (O skrčení). Ať X je T_4 prostor a $\{G_1, \dots, G_n\}$ je otevřené pokrytí X . Pak existuje otevřené pokrytí $\{H_1, \dots, H_n\}$ prostoru X takové, že $\overline{H_i} \subset G_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

(Tj. každé konečné otevřené pokrytí má uzavřené skrčení takové, že vnitřky tvoří také pokrytí.)

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

konec 11. přednášky (30. 4. 2026)

Lemma 54 (O nadmutí). Ať X je T_4 prostor, $\{F_1, \dots, F_n\}$ konečný systém uzavřených podmnožin X řádu nejvýše n a necht' $\{U_1, \dots, U_n\}$ jsou otevřené množiny splňující $F_i \subset U_i$ pro $i = 1, \dots, n$. Pak existuje systém $\{V_1, \dots, V_n\}$ otevřených podmnožin X splňující, že $\{\overline{V_1}, \dots, \overline{V_n}\}$ má řád nejvýše n a $F_i \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 55 (Charakterizace pokrývací dimenze). Pro T_4 prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.

(a) $\dim X \leq n$.

(b) Každé konečné otevřené pokrytí prostoru X má otevřené skrčení řádu nejvýše n .

(c) Každé konečné otevřené pokrytí X má uzavřené skrčení řádu nejvýše n .

(d) Každé konečné otevřené pokrytí X je zjemněno konečným uzavřeným pokrytím řádu $\leq n$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 56 (Součtová věta pro dimenzi \dim). Je-li T_4 prostor X sjednocením spočetně mnoha svých uzavřených podprostorů F_i a $\dim F_i \leq n$, pak $\dim X \leq n$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 57. Pokud X je T_4 , pak $\dim X \leq \text{Ind } X$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

5.1. Topologická dimenze v metrizovatelných prostorech

Věta 58. Je-li X metrizovatelný prostor, pak $\dim X = \text{Ind } X$.

Důkaz. Důkaz byl uveden pouze pro speciální případ kompaktního prostoru X , tento speciální případ lze zkoušet. □

konec 12. přednášky (7. 5. 2026)

Lemma 59. Necht' X je metrizovatelný prostor a $Z \subset X$ silně 0-dim. Pak pro každou $F \subset X$ uzavřenou a $U \subset X$ otevřenou splňující $F \subset U$ existuje otevřená $V \subset X$ splňující $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$ a $Z \cap \partial V = \emptyset$.

Věta 60. Necht' X je metrizovatelný separabilní prostor. Pak $\text{ind } X = \dim X = \text{Ind } X$.

Věta 61. Necht' X je metrizovatelný prostor a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(a) $\text{Ind } X \leq n$,

(b) $X = Y \cup Z$, kde $\text{Ind } Y \leq n - 1$ a $\text{Ind } Z \leq 0$.

Důsledek 62 (o oddělování). *Nechť X je metrizovatelný prostor a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pokud je $\text{Ind } X \leq n$, pak pro každou posloupnost $(n+1)$ dvojic uzavřených disjunktních množin $(F_1, H_1), \dots, (F_{n+1}, H_{n+1})$, existují otevřené množiny U_i , $i = 1, \dots, n+1$, že $F_i \subseteq U_i \subseteq \overline{U_i} \subseteq X \setminus H_i$ a $\bigcap_{i=1}^{n+1} \partial U_i = \emptyset$.*

Věta 63. *Nechť X a Y jsou neprázdné metrizovatelné prostory, pak $\text{Ind}(X \times Y) \leq \text{Ind } X + \text{Ind } Y$.*

5.2. Dimenze a Euklidovské prostory

Věta 64 (Brouwerova o pevném bodě). *Každé spojitě zobrazení $f: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ má pevný bod, tj. existuje $x \in [0, 1]^n$, pro které $f(x) = x$.*

Věta 65. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že $\dim[0, 1]^n = \dim \mathbb{R}^n = n$.*

Důsledek 66. *Pokud $n, m \in \mathbb{N}$ a $n \neq m$, pak \mathbb{R}^n není homeomorfní \mathbb{R}^m .*