

1. Základní topologické pojmy

1.1. Topologický prostor, báze, subbáze

Definice. Necht X je množina. Řekneme, že $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ je *topologie* na X , pokud platí

(T1) $\emptyset, X \in \tau$,

(T2) jsou-li $U, V \in \tau$, pak $U \cap V \in \tau$,

(T3) je-li $\mathcal{U} \subseteq \tau$, pak $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$.

Dvojice (X, τ) se pak nazývá *topologický prostor*. Prvky X se nazývají *bod*y, prvky τ se nazývají *otevřené* množiny. Množina $V \subseteq X$ se nazývá *okolí* bodu $x \in X$, pokud existuje $U \in \tau$, pro které $x \in U \subseteq V$. Množinu všech okolí bodu x značíme $\mathcal{U}(x)$. Soubor množin $\mathcal{B} \subseteq \tau$ se nazývá *báze* prostoru X , pokud každé $U \in \tau$ lze vyjádřit jako sjednocení nějakého $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$. Soubor $\mathcal{S} \subseteq \tau$ se nazývá *subbáze*, pokud systém $\{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}, \mathcal{F} \text{ je konečná}\}$ je báze.

Příklady. • Je-li (X, ρ) metrický prostor, pak soubor všech ρ -otevřených množin tvoří topologii na X . Říkáme pak, že tato *topologie je generovaná metrikou* ρ . Báze topologie generované metrikou je například $\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$. Topologický prostor je *metrizovatelný*, pokud je jeho topologie generovaná nějakou metrikou.

- Na $\mathbb{R}$ s obvyklou metrikou bázi topologie tvoří otevřené intervaly, subbáze je například systém $\{(-\infty, b), (a, \infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Na $\mathbb{R}^2$ s obvyklou metrikou je báze topologie například $\{(a, b) \times (c, d) : a < b, c < d\}$, subbáze topologie roviny je například $\{\mathbb{R} \times (a, b), (a, b) \times \mathbb{R} : a < b\}$.
- Na každé množině X máme dvě triviální topologie. Dvojice $(X, \mathcal{P}(X))$ se nazývá *diskrétní prostor* ($\mathcal{P}(X)$ je diskrétní topologie). Dvojice $(X, \{\emptyset, X\})$ se nazývá *indiskrétní prostor* ($\{\emptyset, X\}$ je indiskrétní topologie). Každý diskrétní prostor je metrizovatelný. Indiskrétní alespoň dvou-bodový prostor není metrizovatelný.

Tvrzení 1 (Vlastnosti báze). *Je-li (X, τ) topologický prostor a $\mathcal{B}$ jeho báze, pak*

(B1) *pro každé $U, V \in \mathcal{B}$ a $x \in U \cap V$ existuje $W \in \mathcal{B}$, že $x \in W \subseteq U \cap V$,*

(B2) $\bigcup \mathcal{B} = X$.

Je-li X množina a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ systém množin splňující podmínky (B1) a (B2), pak existuje jediná topologie na X , jejíž báze je $\mathcal{B}$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Důsledek 2. *Je-li X množina a $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ splní $\bigcup \mathcal{S} = X$, pak existuje právě jedna topologie na X , jejíž subbáze je $\mathcal{S}$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Příklady. • Ať $(X, <)$ je lineárně uspořádaná množina. Pak *topologie generovaná uspořádáním* $<$ je topologie τ generovaná bází

$$\mathcal{B} = \{(a, b), a, b \in X, a < b\} \cup \{(\leftarrow, b) : b \in X\} \cup \{(a, \rightarrow) : a \in X\} \cup \{X\}$$

(prvkům $\mathcal{B}$ říkáme otevřené intervaly). Pak říkáme, že (X, τ) je *uspořádaný topologický prostor*.

- *Sorgenfreyova přímka* je množina $\mathbb{R}$ s topologií generovanou bází $\mathcal{B} = \{[a, b) : a < b\}$.

Tvrzení 3 (Charakterizace otevřených množin pomocí okolí). *Ať (X, τ) je topologický prostor a $U \subseteq X$. Pak $U \in \tau$, právě když*

$$\forall x \in U \exists V \in \mathcal{U}(x) : V \subseteq U.$$

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 4 (Vlastnosti systému všech okolí). *Je-li (X, τ) topologický prostor, pak pro každé $x \in X$ soubor množin $\mathcal{U}(x)$ splňuje:*

(U1) $\mathcal{U}(x) \neq \emptyset$ a $x \in \bigcap \mathcal{U}(x)$,

(U2) je-li $U \in \mathcal{U}(x)$ a $U \subseteq V \subseteq X$, pak $V \in \mathcal{U}(x)$,

(U3) jsou-li $U, V \in \mathcal{U}(x)$, pak $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$,

(U4) pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$ existuje $V \in \mathcal{U}(x)$, že pro každé $y \in V$ je $U \in \mathcal{U}(y)$.

Je-li X libovolná množina a soubory množin $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$, $x \in X$, splňují podmínky (U1) - (U4), pak na množině X existuje jediná topologie τ jejíž systémy okolí jsou $\{\mathcal{U}(x)\}_{x \in X}$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Definice. Necht (X, τ) je topologický prostor. Systém množin $\mathcal{B}(x)$ se nazývá *báze okolí* v bodě x , pokud $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$ a pro každé $V \in \mathcal{U}(x)$ existuje prvek $U \in \mathcal{B}(x)$, že $U \subseteq V$. Indexovaný soubor $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ se nazývá *báze okolí prostoru X* .

Tvrzení 5 (Vlastnosti báze okolí). *Je-li (X, τ) topologický prostor a $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ báze okolí, pak pro každé $x \in X$ soubor množin $\mathcal{B}(x)$ splňuje*

(O1) $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ a $x \in \bigcap \mathcal{B}(x)$,

(O2) pro každé $U, V \in \mathcal{B}(x)$ existuje $W \in \mathcal{B}(x)$, že $W \subseteq U \cap V$.

(O3) pro každé $U \in \mathcal{B}(x)$ existuje $V \in \mathcal{B}(x)$, že pro každé $y \in V$ existuje $W \in \mathcal{B}(y)$, že $W \subseteq U$.

Je-li X libovolná množina a soubory množin $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$, $x \in X$, splňují podmínky (O1), (O2) a (O3), pak na množině X existuje jediná topologie τ s bází okolí $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$.

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. □

Definice. *Váhu* topologického prostoru X značíme $w(X)$ a je to nejmenší mohutnost báze. Přesnější značení $w(X, \tau)$ použijeme tehdy, pokud topologie τ není zřejmá z kontextu. *Charakter* v bodě $x \in X$ značíme $\chi(x, X)$ a je to nejmenší mohutnost báze okolí v bodě x . Charakter prostoru X je supremum charakterů v jednotlivých bodech.

Příklady. • Je-li X metrizovatelný, pak má spočetný charakter. Dále pak platí že $w(X) \leq \omega$ právě když je separabilní.

- Je-li X diskrétní, pak $\chi(X) = 1$ a $w(X) = |X|$.
- Je-li X indiskrétní, pak $w(X) = \chi(X) = 1$.

konec 1. přednášky (29. 9. 2025)

Tvrzení 6. *Necht X je topologický prostor. Pak $\chi(X) \leq w(X) \leq 2^{|X|}$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

1.2. Vnitřek, uzávěr a hranice, husté a řídké množiny, hromadné a izolované body, spojitá zobrazení

Definice. Množina F v topologickém prostoru (X, τ) se nazývá *uzavřená*, pokud $X \setminus F$ je otevřená. Množina se nazývá *obojetná*, pokud je otevřená i uzavřená zároveň. Je-li $A \subseteq X$, pak *uzávěr* množiny A je množina

$$\overline{A} := \bigcap \{F : F \text{ je uzavřená}, A \subseteq F\}.$$

Vnitřek množiny A je množina $\text{Int } A = \bigcup \{U \in \tau : U \subseteq A\}$. *Hranice* množiny A je $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Poznámka. Je snadné si uvědomit že $\emptyset$ a X jsou obojetné množiny a že systém uzavřených množin je uzavřený na konečná sjednocení a libovolné průniky. Uzávěr i hranice jsou uzavřené množiny, vnitřek je otevřená množina. Množina je uzavřená, právě když se rovná svému uzávěru, a je otevřená, právě když se rovná svému vnitřku.

Tvrzení 7 (Vztah vnitřku a uzávěru). *Nechť X je topologický prostor. Pak*

$$X \setminus \overline{A} = \text{Int}(X \setminus A) \quad \text{a} \quad X \setminus \text{Int } A = \overline{(X \setminus A)}.$$

Důkaz. Důkaz je snadný, byl vynechán, může být u zkoušky použit jakožto příklad navíc. □

Tvrzení 8 (Charakterizace uzávěru). *Nechť X je topologický prostor, $x \in X$, $A \subseteq X$ a $\mathcal{B}(x)$ báze okolí v bodě x . Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (1) $x \in \overline{A}$,
- (2) pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$ je $U \cap A \neq \emptyset$,
- (3) pro každé $U \in \mathcal{B}(x)$ je $U \cap A \neq \emptyset$.

Speciálně, je-li $U \subset X$ otevřená pak

$$U \cap A = \emptyset \Leftrightarrow U \cap \overline{A} = \emptyset.$$

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 9 (Charakterizace hranice). *Ať X je topologický prostor, $A \subseteq X$ a $x \in X$. Pak*

$$x \in \partial A \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) : (U \cap A \neq \emptyset \ \& \ U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset).$$

Důkaz. Důkaz je snadný, byl vynechán, může být u zkoušky použit jakožto příklad navíc. □

Definice. Ať X je topologický prostor a $A \subset X$. Množina A se nazývá *hustá*, pokud $\overline{A} = X$. Množina A se nazývá *řídká*, pokud $X \setminus \overline{A}$ je hustá v X . *Hustota* prostoru X je nejmenší mohutnost husté podmnožiny, značí se $d(X)$. Řekneme, že X je *separabilní*, pokud $d(X) \leq \omega$.

Tvrzení 10 (Charakterizace hustých a řídkých množin). *Ať X je topologický prostor a $A \subset X$.*

- *A je hustá v X , právě když každá neprázdná otevřená množina $U \subseteq X$ protíná A ,*
- *A je řídká v X , právě když $\text{Int}(\overline{A}) = \emptyset$,*
- *A je řídká v X , právě když každá otevřená neprázdná množina V obsahuje neprázdnou otevřenou množinu U , která je disjunktní s A .*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 11 (Vztah váhy a hustoty). *Pro každý topologický prostor X platí $d(X) \leq w(X)$. Pokud je X metrizovatelný, pak $d(X) = w(X)$.*

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. □

Definice. Bod $x \in A \subseteq X$ se nazývá *izolovaným bodem* množiny A , pokud existuje otevřená množina $U \subseteq X$, že $U \cap A = \{x\}$. Bod $x \in X$ se nazývá *hromadným bodem* množiny A , pokud každé okolí U bodu x protíná $A \setminus \{x\}$. Množinu všech hromadných bodů množiny A značíme A' (tzv. derivace množiny A).

Příklady. V diskrétním prostoru jsou všechny body izolované a žádné hromadné. Je-li $X = \mathbb{R}$ a $A = \mathbb{Q}$, pak $A' = \mathbb{R}$ a žádný bod z A není izolovaný.

Tvrzení 12 (Vlastnosti derivace). *Ať X je topologický prostor a $A \subset X$. Pak $\overline{A} = A \cup A'$ a $(A \cup B)' = A' \cup B'$.*

Důkaz. Důkaz je snadný, byl vynechán, může být u zkoušky použit jakožto příklad navíc. □

Definice. Ať $(X, \tau), (Y, \sigma)$ jsou dva topologické prostory a $f: X \rightarrow Y$ je funkce. Funkce f se nazývá *spojitá*, pokud pro každé $U \in \sigma$ je $f^{-1}(U) \in \tau$. Zobrazení f se nazývá *homeomorfismus*, pokud f je bijekce a f i f^{-1} jsou spojitá. Zobrazení f je *vnoření*, pokud jeho zúžení $f: X \rightarrow f(X)$ je homeomorfismus na podprostor $f(X) \subset Y$. Řekneme, že f je *spojité v bodě x* , pokud pro každé okolí V bodu $f(x)$ existuje okolí U bodu x , že $f(U) \subseteq V$. Zobrazení f se nazývá *otevřené/uzavřené*, pokud je množina $f(M)$ je otevřená/uzavřená v Y pro každou otevřenou/uzavřenou $M \subseteq X$.

Poznámka. Pokud jsou X, Y, Z topologické prostory a $x \in Z$ pak pokud je funkce $f: X \rightarrow Y$ spojitá (v bodě x), je i její restrikce $f|_Z$ spojitá (v bodě x).

Tvrzení 13 (Charakterizace spojitých zobrazení). *Ať $(X, \tau), (Y, \sigma)$ jsou topologické prostory a $f: X \rightarrow Y$ zobrazení a ať $\mathcal{B}$ je báze Y a $\mathcal{S}$ subbáze Y . Pak jsou následující podmínky ekvivalentní*

- (1) f je spojité,
- (2) vzory množin ze subbáze $\mathcal{S}$ jsou otevřené,
- (3) f je spojité v každém bodě,
- (4) vzory množin z báze $\mathcal{B}$ jsou otevřené,
- (5) vzory uzavřených množin jsou uzavřené,
- (6) pro každé $A \subseteq X$ platí $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Důkaz. Důkaz je snadný, byl vynechán, může být u zkoušky použit jakožto příklad navíc. □

Poznámka. Složení spojitých zobrazení je spojité.

konec 2. přednášky (6. 10. 2025)

Definice. Pokud (X, τ) je topologický prostor a $Y \subset X$. Uvažujme $\sigma := \{U \cap Y: U \in \tau\}$. Pak σ je topologie na Y a říkáme, že (Y, σ) je *podprostor* X .

Příklady. Pro metrizable prostory platí, že váha je rovna hustotě a že podprostor separabilního prostoru je separabilní. Pro nemetrizable prostory tato tvrzení již platit nemusí. Následující příklady budou postupně probrány na cvičení.

- Pokud je X double arrow space nebo Sorgenfreyova přímka, pak $d(X) = \omega < 2^\omega = w(X)$. Navíc, každý podprostor X je separabilní.
- Pokud je $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ nespočetný systém nekonečných množin, který je skoro disjunktní, pak pro příslušný Mrówka-Isbell space $X := \psi(\mathcal{A})$ platí $d(X) = \omega < |\mathcal{A}| = w(X)$. Navíc, X je separabilní ale obsahuje neseparabilní podprostor (konkrétněji, $\mathcal{A} \subset \psi(\mathcal{A})$ je nespočetný uzavřený podprostor, který je diskretní).

1.3. Nety a konvergence

Definice. Dvojice $(I, \leq)$ se nazývá *shora usměrněná množina*, pokud $\leq$ je částečné uspořádání na I (tj. binární reflexivní, tranzitivní a slabě antisymetrická relace) s vlastností, že pro $i, j \in I$ existuje $k \in I$, že $i \leq k$ a $j \leq k$. Symetrickým symbolem $\geq$ pak přirozeně myslíme inverzní relaci. *Net* v topologickém prostoru X je zobrazení z nějaké neprázdné usměrněné množiny do X . Speciálním případem je *posloupnost* (což je net indexovaný přirozenými čísly). Řekneme, že net $(x_i)_{i \in I}$ *konverguje* k bodu $x \in X$, pokud pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$ existuje $i \in I$, že pro každé $j \geq i$ platí $x_j \in U$. Bod x se pak nazývá *limita netu* $(x_i)_{i \in I}$.

Tvrzení 14 (Charakterizace uzávěru pomocí konvergence netů). *Ať X je topologický prostor a $A \subseteq X$. Pak*

- $x \in \overline{A}$ právě když x je limitou netu sestávajícího z bodů z A ,
- A je uzavřená právě když každý konvergentní net sestávající z bodů v A má limitu v A .

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 15 (Charakterizace spojitosti pomocí konvergence netů). *Ať X a Y jsou topologické prostory. Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je spojitě v bodě x , právě když pro každý net $(x_i)_{i \in I}$ konvergující k bodu x konverguje net $(f(x_i))_{i \in I}$ k $f(x)$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Příklad. Tvrzení 14 a Tvrzení 15 neplatí, pokud v něm slovo “net” nahradíme slovem “posloupnost”. Vskutku, zvolme nespočetnou množinu X s topologií

$$\tau := \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : X \setminus A \text{ je spočetná}\}.$$

Této topologii τ říkáme *ko-spočetná topologie*. Pak pro libovolnou nespočetnou množinu $A \subsetneq X$ platí, že A není uzavřená, ale zároveň každá konvergentní posloupnost sestávající z bodů z A je konstantní až na konečně mnoho prvků. Dále, pokud na $\{0, 1\}$ uvažujeme diskrétní topologii a funkci $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ definujeme předpisem $f(x) = 1$ pro $x \in A$ a $f(x) = 0$, pak f není spojitá funkce ale kdykoliv $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je konvergentní posloupnost v A , pak $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

1.4. Oddělovací axiomy

Definice. Topologický prostor X se nazývá

- T_0 , pokud pro každé různé body $x, y \in X$ existuje otevřená U , že $|U \cap \{x, y\}| = 1$,
- T_1 , pokud pro každé různé body $x, y \in X$ existuje otevřená U , že $x \in U$ a $y \notin U$,
- T_2 (nebo *Hausdorffův*), pokud pro každé různé body $x, y \in X$ existují otevřené disjunktní množiny U, V , že $x \in U, y \in V$,
- *regulární*, pokud pro každou uzavřenou $F \subseteq X$ a bod $x \in X \setminus F$ existují otevřené disjunktní množiny U, V , že $x \in U$ a $F \subseteq V$,
- *normální*, pokud pro každé dvě disjunktní uzavřené množiny E, F existují disjunktní otevřené množiny U, V , že $E \subseteq U$ a $F \subseteq V$,
- *úplně regulární*, pokud pro každou uzavřenou množinu F a bod $x \in X \setminus F$ existuje spojitá funkce $f: X \rightarrow [0, 1]$, že $f(x) = 0$ a $f(F) \subseteq \{1\}$,
- T_3 , pokud je regulární a T_1 ,
- $T_{3\frac{1}{2}}$ (nebo *Tichonovův*), pokud je úplně regulární a T_1 ,

- T_4 , pokud je normální a T_1 .

Poznámka. Platí implikace

$$T_4 \implies T_{3\frac{1}{2}} \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0,$$

ovšem první implikaci je relativně těžké dokázat (viz. Důsledek 19), ostatní je snadné. Žádnou z uvedených implikací nelze obrátit, což je v prvních třech případech obtížnější (viz. Příklady 1.4 a příklad Niemiýtzkého roviny, který bude předveden na cvičení, příklad že nelze obrátit druhou implikaci je nejsložitější a vynecháme jej, je sepsán ve skriptech).

Je jednoduché si rozmyslet, že vlastnosti $T_{3\frac{1}{2}}$, T_3 , T_2 , T_1 a T_0 se zachovávají na podprostorech a že vlastnost T_4 se zachová na uzavřených podprostorech. Obecně se normalita na podprostorech nezachová, příslušný protipříklad bude zmíněn později.

Lemma 16. *Ať (X, τ) je topologický prostor. Pak platí:*

- X je $T_1 \iff$ každá jednoprvková podmnožina X je uzavřená $\iff$ každá konečná podmnožina X je uzavřená.
- X je $T_2 \iff \forall x, y \in X, x \neq y \exists U \in \mathcal{U}(x): x \in U$ a $y \notin \bar{U}$.
- X je regulární $\iff \forall x \in X \forall U \in \mathcal{U}(x) \exists V \in \mathcal{U}(x): \bar{V} \subseteq U$.
- X je normální $\iff \forall V \in \tau \forall E \subseteq V$ uzavřenou $\exists U \in \tau: E \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq V$.

Důkaz. Důkaz je snadný, byl vynechán, může být u zkoušky použit jakožto příklad navíc. □

Tvrzení 17 (Jednoznačnost limity netu). *Topologický prostor je T_2 právě když každý net má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 18 (Urysohnovo lemma). *Topologický prostor X je normální, právě když pro každé dvě disjunktní uzavřené množiny E a F existuje spojitá funkce $f: X \rightarrow [0, 1]$, že $f(E) \subseteq \{0\}$ a $f(F) \subseteq \{1\}$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Důsledek 19. *Pokud je topologický prostor T_4 , pak je $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

konec 3. přednášky (14. 10. 2025)

Definice. Řekneme, že topologický prostor je *nuldimenzionální*, pokud existuje báze okolí sestávající z obojetných množin.

Příklady. • Sierpińského prostor (tj. prostor $X = \{0, 1\}$ s topologií $\tau = \{\emptyset, X, \{0\}\}$) je T_0 , ale není T_1 .

- Příkladem topologického prostoru, který je T_1 a není T_2 je nekonečná množina X s *ko-konečnou topologií*, tj. s topologií $\tau := \{\emptyset\} \cup \{A \subset X: X \setminus A \text{ je konečná}\}$.
- Příkladem topologického prostoru, který je T_2 a není T_3 je množina $S := (0, 1)^2 \cup \{(0, 0)\}$ s topologií generovanou bází okolí danou takto:
 - pro $x \in (0, 1)^2$ je $\mathcal{B}(x) := \{B_\rho(x, \varepsilon): \rho \text{ je Euklidovská metrika a } \varepsilon > 0\}$,
 - pro $x = (0, 0)$ je $\mathcal{B}(x) := \{[0, 1/2) \times [0, 1/n) \cap S: n \in \mathbb{N}\}$.
- Každý nuldimenzionální T_1 topologický prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 20 (Metrizovatelné prostory jsou normální). *Metrizovatelné prostory jsou T_4 .*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

2. Operace s topologickými prostory a zobrazeními

2.1. Projektivně a induktivně generované topologie

Definice. Ať X je množina a τ, σ dvě topologie na X . Řekneme, že τ je *větší* (*jemnější*, *silnější*) než σ , pokud $\tau \supseteq \sigma$. Topologie σ se tom případě nazývá *menší* (*hrubší*, *slabší*).

Diskrétní topologie je největší ze všech topologií, indiskrétní nejmenší.

Definice (Projektivní a induktivní vytváření). Ať X je množina, (X_i, τ_i) , $i \in I$ soubor topologických prostorů a $f_i: X \rightarrow X_i$, $i \in I$ je soubor zobrazení. Topologie τ na množině X se nazývá *projektivně vytvořená* zobrazeními f_i , pokud τ je nejmenší topologie při níž jsou všechna zobrazení $f_i: (X, \tau) \rightarrow (X_i, \tau_i)$ spojitá. Jsou-li $f_i: X_i \rightarrow X$, pak topologie τ na X se nazývá *induktivně vytvořená*, pokud τ je největší topologie, při níž jsou všechna zobrazení $f_i: (X_i, \tau_i) \rightarrow (X, \tau)$ spojitá.

Věta 21 (Existence a vlastnosti projektivně vytvořeného TP). *Ať X je množina, (X_i, τ_i) , $i \in I$ soubor topologických prostorů a $f_i: X \rightarrow X_i$, $i \in I$ je soubor zobrazení. Pak existuje právě jedna topologie τ projektivně vytvořená souborem zobrazení f_i , $i \in I$. Tato topologie má následující vlastnosti.*

- (P1) Subbáze topologie τ je $\{f_i^{-1}(U): U \in \tau_i\}$
- (P2) Kdykoliv (Y, σ) je topologický prostor a kdykoliv je dáno $g: Y \rightarrow X$, pak zobrazení g je spojité, právě když pro každé $i \in I$ je zobrazení $f_i \circ g$ spojité.
- (P3) Kdykoliv je dán net $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ v X a bod $x \in X$, pak $x_\alpha \rightarrow x$ v prostoru (X, τ) , právě když pro každé $i \in I$ platí $f_i(x_\alpha) \rightarrow f_i(x)$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Příklady. • Pokud je Y podprostor topologického prostoru X , pak topologie na Y je projektivně vytvořená z topologie na X s pomocí zobrazení identity $i: Y \rightarrow X$.

- $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ je vnoření právě když je prosté a topologie τ je projektivně vytvořená zobrazením f .
- Necht X je topologický prostor. Pak symbolem $C_p(X)$ rozumíme topologický prostor $(C(X), \tau_p)$, kde $C(X) := \{f: X \rightarrow \mathbb{R}: f \text{ spojité}\}$ a τ_p je topologie projektivně vytvořená zobrazeními $\delta_x: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in X$ danými předpisem $\delta_x(f) := f(x)$. Pak pro každý net funkcí $(f_i)_{i \in I}$ z $C_p(X)$ a pro každé $f \in C_p(X)$ platí, že $f_i \rightarrow f$ právě když $f_i(x) \rightarrow f(x)$ pro každé $x \in X$. Říkáme, že τ_p je *topologie bodové konvergence*.

Věta 22 (Existence a vlastnosti induktivně vytvořeného TP). *Ať X je množina, (X_i, τ_i) , $i \in I$ soubor topologických prostorů a $f_i: X_i \rightarrow X$, $i \in I$ je soubor zobrazení. Pak existuje právě jedna topologie τ induktivně vytvořená souborem zobrazení f_i , $i \in I$. Tato topologie má následující vlastnosti.*

- (I1) $\tau = \{M \subset X: f_i^{-1}(M) \in \tau_i, i \in I\}$
- (I2) Kdykoliv (Y, σ) je topologický prostor a kdykoliv je dáno $g: X \rightarrow Y$, pak zobrazení g je spojité, právě když pro každé $i \in I$ je zobrazení $g \circ f_i$ spojité.

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. □

2.2. Součin

Definice. Jsou-li (X_i, τ_i) topologické prostory, pak jejich součin je topologický prostor (X, τ) , kde $X = \prod X_i$ a topologie τ je projektivně vytvořená projekcemi $\pi_i: X \rightarrow X_i$. Značí se $\prod_{i \in I} X_i$. Zobrazení $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ se pak nazývá *vnoření*, pokud f je prosté a topologie τ je projektivně vytvořená zobrazením f .

Poznámka. Báze $\mathcal{B}$ na součinu vypadá následovně:

$$\mathcal{B} = \{\pi_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_n) : i_1, \dots, i_n \in I, U_1 \in \tau_{i_1}, \dots, U_n \in \tau_{i_n}, n \in \mathbb{N}\},$$

přičemž uvedený průnik vzorů projekcí můžeme přepsat jako

$$\pi_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_n) = \left\{ x \in \prod X_i : x(i_1) \in U_1, \dots, x(i_n) \in U_n \right\}.$$

Konvergence netů v součinné topologii je přímočará: net $(x_j)_{j \in J}$ konverguje k x , právě když pro každé $i \in I$ konverguje net $(x_j(i))_{j \in J}$ k $x(i)$. Tedy součinná topologie odpovídá bodové konvergenci. Proto se součinná topologie někdy nazývá topologií bodové konvergence. Uzávěr množiny tvaru $\prod A_i$ je $\prod \bar{A}_i$.

konec 4. přednášky (20. 10. 2025)

Definice. Máme-li soubor zobrazení $f_i: X_i \rightarrow Y_i, i \in I$ definujeme *součin zobrazení* $\prod_I f_i: \prod_I X_i \rightarrow \prod_I Y_i$ rovností $\prod_I f_i(\{x_i\}_{i \in I}) = \{f_i(x_i)\}_{i \in I}$. Máme-li soubor zobrazení $f_i: X \rightarrow Y_i, i \in I$ definujeme *diagonální zobrazení* $\Delta_I f_i: X \rightarrow \prod_I Y_i$ rovností $\Delta_I f_i(x) = \{f_i(x)\}_{i \in I}$.

Tvrzení 23. *Nechť $Z, Y_i, i \in I$ a $X_i, i \in I$ jsou topologické prostory.*

- (i) *Zobrazení $f: Z \rightarrow \prod_I X_i$ je spojité, právě když jsou spojitá všechna složení f s projekcemi $\pi_i: \prod_I X_i \rightarrow X_i$.*
- (ii) *Jsou-li $f_i: Y_i \rightarrow X_i, i \in I$ spojitá zobrazení, je i jejich součin $\prod_I f_i: \prod_I Y_i \rightarrow \prod_I X_i$ spojitý.*
- (iii) *Jsou-li $f_i: Z \rightarrow X_i, i \in I$ spojitá zobrazení, je i jejich diagonální součin $\Delta_I f_i: Z \rightarrow \prod_I X_i$ spojitý.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Důsledek 24. *Je-li X topologický prostor a jsou-li $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá zobrazení, pak $f + g, f - g, f \cdot g, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}, |f|$ jsou spojitá. Pokud g je nenulové, pak také f/g je spojité.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 25 (Charakterizace Hausdorffova prostoru). *Topologický prostor X je Hausdorffův, právě když $\{(x, x) : x \in X\}$ je uzavřená v $X \times X$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

2.3. Suma, kvocient

Definice. Suma prostorů $X_i, i \in I$ je prostor $\biguplus_I X_i$ skládající se z bodů (i, x) , kde $i \in I, x \in X_i$. Pokud jsou všechny množiny X_i disjunktní, většinou se berou místo dvojic (i, x) rovnou body x .

Jsou-li $(X_i, \tau_i), i \in I$ topologické prostory, pak jejich *topologická suma* je topologický prostor $(\biguplus_I X_i, \tau)$, kde topologie τ je definována předpisem

$$\tau := \left\{ \biguplus_I O_i : O_i \subset X_i \text{ jsou otevřené} \right\}.$$

Topologickou sumu značíme jako $\bigoplus_I X_i$.

(Pozor: na značení topologické sumy není shoda, v různé literatuře se používají různé symboly. Značení použité výše je mírně nešikovné, neboť například v teorii Banachových prostorů symbolem $\bigoplus_I X_i$ značíme Banachův prostor, který je jakožto topologický prostor součinem X_i a ne topologickou sumou.)

Poznámka. Topologie na $X := \bigoplus_I X_i$ je induktivně generovaná kanonickými vnořeními $X_i \ni x \mapsto (i, x) \in \bigoplus_I X_i$.

Jsou-li X_i disjunktní, pak množina U v sumě topologických prostorů $\bigoplus_{i \in I} X_i$ je otevřená, právě když pro každé $i \in I$ je $U \cap X_i$ otevřená v X_i . Množiny X_i jsou obojetné v X . Jsou-li $f_i : X_i \rightarrow Y_i$, $i \in I$ spojitá zobrazení, pak $\bigoplus_I f_i : \bigoplus_I X_i \rightarrow \bigoplus_I Y_i$ je spojitě.

Definice. Je-li (X, τ) topologický prostor, $E \subseteq X \times X$ ekvivalenční relace, pak kvocientová topologie na X/E je induktivně definována zobrazením $x \mapsto [x]_E$.

Zobrazení $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ se nazývá kvocientové, pokud f je na a topologie σ je induktivně vytvořená zobrazením f .

Poznámka. Náznornější je opět přímý popis topologie kvocientu. Množina U v kvocientovém prostoru Y je otevřená, právě když $f^{-1}(U)$ je otevřená v X .

Je-li $f : X \rightarrow Y$ kvocientové zobrazení, pak na X lze přirozeným způsobem uvažovat ekvivalenci $\sim$, že $x \sim y$, právě když $f(x) = f(y)$. Pak $X/\sim$ je přirozeným způsobem homeomorfní s Y .

Příklady. • Definujeme-li na $\mathbb{R}$ ekvivalenci mezi xEy , právě když $\{x, y\} \in \mathbb{Q}$ nebo $\{x, y\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pak $\mathbb{R}/E$ je dvoubodový indiskrétní prostor. Speciálně, kvocient T_4 prostoru nemusí být ani T_0 .

- Definujeme-li na $\mathbb{R}$ ekvivalenci mezi xEy , právě když $x - y \in \mathbb{Z}$, pak kvocientový prostor $\mathbb{R}/E$ je homeomorfní kružnici.

Tvrzení 26 (Charakterizace kvocientového zobrazení). *Ať (X, τ) a (Y, σ) jsou topologické prostory a $f : X \rightarrow Y$ je zobrazení. Pak f je kvocientové, právě když f je na a pro každou $V \subseteq Y$ je $V \in \sigma \iff f^{-1}(V) \in \tau$.*

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. $\square$

Tvrzení 27 (Postačující podmínka kvocientového zobrazení). *Je-li zobrazení $f : X \rightarrow Y$ spojitě, otevřené (nebo uzavřené) a na, pak je kvocientové.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Poznámka. Věta o otevřeném zobrazení říká, že spojitě surjektivní lineární zobrazení mezi Banachovými prostory už je otevřené. Kvocientové zobrazení mezi topologickými prostory nemusí být ani otevřené ani uzavřené.

Poznámka. Spojitý obraz (a tedy i kvocient) separabilního prostoru je separabilní prostor.

Přehled zachovávání vlastností jednotlivými operacemi. Symbol (+) znamená zachovávání pojmu alespoň na spočetný součin nebo sumu.

	$T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}$	T_4	separabilní	spoč. báze	spoč. charakter	metr.
podprostor	+	-	-	+	+	+
(spočetná) suma	+	+	-(+)	-(+)	+	+
kvocient	-	-	+	-	-	-
(spočetný) součin	+	-	-(+)	-(+)	-(+)	-(+)

(Něco bylo/bude na přednášce, něco bylo/bude na cvičení ..)

2.4. Rozšiřování spojitých funkcí

Tvrzení 28. *Ať X, Y jsou topologické prostory a $f, g : X \rightarrow Y$ spojitá zobrazení. Pokud Y je Hausdorffův, pak $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ je uzavřená.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Důsledek 29 (Jednoznačnost spojitěho rozšíření). *Je-li tedy $f : X \rightarrow Y$ spojitě, Y Hausdorffův a $S \subseteq X$ hustá, pak funkce $f|_S$ má jediné spojitě rozšíření na celé X .*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 30. *Je-li X topologický prostor, $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité a posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně k f , pak f je spojitá.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

konec 5. přednášky (27. 10. 2025)

Věta 31 (Tietze-Urysohn). *Je-li X normální prostor a $F \subseteq X$ uzavřená, pak lze každou spojitou funkci $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ spojitě rozšířit na celé X , tedy existuje spojitá funkce $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$, že $\tilde{f}|_F = f$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

3. Kompaktnost

3.1. Kompaktní prostory

Definice. Systém množin $\mathcal{S}$ se nazývá *pokrytí* prostoru X , pokud $\bigcup \mathcal{S} = X$. Každý podsystém $\mathcal{S}$, který je pokrytí se nazývá *podpokrytí*. Pokrytí se nazývá *otevřené*, pokud jeho prvky jsou otevřené množiny. Topologický prostor se nazývá *kompaktní*, pokud z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí. Topologický prostor se nazývá *spočetně kompaktní*, pokud z každého spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí. Topologický prostor se nazývá *Lindelöfov*, pokud z každého otevřeného pokrytí lze vybrat spočetné podpokrytí.

Řekneme, že systém $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je *centrovaný*, pokud $F_1 \cap \dots \cap F_n \neq \emptyset$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$.

Definice. Nechť X je topologický prostor, $(I, \leq)$ shora usměrněná množina a $(x_i)_{i \in I}$ je net. Bod $x \in X$ se nazývá *hromadným bodem netu* $(x_i)_{i \in I}$, pokud pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$ a každé $i \in I$ existuje $j \geq i$, že $x_j \in U$.

Nechť dále $(J, \leq)$ je shora usměrněná množina. Pak řekneme, že zobrazení $\varphi : J \rightarrow I$ je *kofinální*, pokud pro každé $i_0 \in I$ existuje $j_0 \in J$ splňující $\varphi([j_0, \rightarrow]) \subset [i_0, \rightarrow)$ (tj. pro každé $j \in J$, $j_0 \leq j$ je $i_0 \leq \varphi(j)$). Pokud je dáno kofinální zobrazení $\varphi : J \rightarrow I$, pak řekneme, že $(x_{\varphi(j)})_{j \in J}$ je *podnet* netu $(x_i)_{i \in I}$.

Poznámka. Je-li dána posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ v prostoru X , pak podposloupnosti jsou speciálním případem podnetů. Existují ale i podnety, které nejsou podposloupnostmi. Například $(x_{F(t)})_{t \in \mathbb{R}}$, kde $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ je libovolné zobrazení splňující $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \infty$.

Je snadné si rozmyslet, že pokud net (x_i) konverguje k bodu x , pak každý podnet konverguje také k bodu x .

Věta 32 (Charakterizace kompaktnosti). *Pro topologický prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.*

- (a) X je kompaktní.
- (b) Každý centrovaný systém z uzavřených množin má neprázdný průnik.
- (c) Každý net v X má konvergentní podnet.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Lemma 33. *Nechť X je topologický prostor a $x \in X$. Pak x je hromadným bodem netu $(x_i)_{i \in I}$ právě tehdy, když existuje podnet netu $(x_i)_{i \in I}$, který k bodu x konverguje.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 34 (Charakterizace spočetné kompaktnosti). *Pro topologický prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.*

- (a) X je spočetně kompaktní.
- (b) Každý spočetný centrovaný systém z uzavřených množin má neprázdný průnik.
- (c) Každá posloupnost v X má konvergentní podnet.

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. □

Věta 35 (Charakterizace Lindelöfovosti). *Pro topologický prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.*

(a) X je Lindelöfův.

(b) Každý spočetně centrovaný systém z uzavřených množin má neprázdný průnik.

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. $\square$

Tvrzení 36 (Zachovávání vlastností). *Kompaktnost, spočetná kompaktnost i Lindelöfovost se dědí na uzavřené podprostory a spojité obrazy.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Důsledek 37 (Nabývání extrémů). *Spojité reálné funkce na (spočetně) kompaktním neprázdném prostoru nabývají svého maxima a minima.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Příklady. • Pokud $(X, \leq)$ je lineárně uspořádaný a každá (i prázdná) podmnožina $A \subset X$ má supremum a infimum, pak X s topologií generovanou uspořádáním je kompaktní prostor.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

- $[0, \alpha]$ je kompaktní prostor pro každý ordinál α .

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. $\square$

konec 6. přednášky (3. 11. 2025)

Lemma 38 (Alexander). *Ať X je topologický prostor a $\mathcal{S}$ jeho subbáze. Předpokládejme, že z každého pokrytí $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ lze vybrat konečné podpokrytí. Pak X je kompaktní.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Věta 39 (Tichonov). *Součin kompaktních topologických prostorů je kompaktní.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Poznámka. Tichonovova věta je v ZF ekvivalentní s AC. Tichonovova věta zúžená pouze na Hausdorffovy prostory je v ZF ekvivalentní s Boolean prime ideal theorem.

V dalších tvrzeních potřebujeme Hausdorffovskost kompaktních.

Tvrzení 40 (Kompakty jsou uzavřené v Hausdorffových prostorech). *Je-li X Hausdorffův topologický prostor a $K \subseteq X$ je kompaktní, pak K je uzavřená v X .*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Tvrzení 41 (Automatický homeomorfismus). *Ať X, Y jsou Hausdorffovy kompaktní topologické prostory a $f: X \rightarrow Y$ spojité. Je-li f na, pak f je kvocientové zobrazení. Je-li f bijekce, pak f je homeomorfismus.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Poznámka. Tedy kompaktní Hausdorffova topologie na dané množině je minimální Hausdorffova a maximální kompaktní.

Věta 42 (Postačující podmínka pro normalitu). *Regulární Lindelöfův topologický prostor je normální. Hausdorffův kompaktní prostor je T_4 .*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Tvrzení 43 (Spojitý obraz kompaktního nezvyšuje váhu). *Nechť X, Y jsou Hausdorffovy topologické prostory, X je kompaktní a $f: X \rightarrow Y$ je spojité a surjektivní zobrazení. Pak $w(Y) \leq w(X)$.*

3.2. Prostory spojitých funkcí na kompaktu

Pro dva topologické prostory X, Y označme symbolem $C(X, Y)$ množinu všech spojitých funkcí X do Y . V případě, že $Y = \mathbb{R}$, píšeme pouze $C(X)$. Pro kompaktní topologický prostor K tvoří $C(K)$ spolu se supremovou normou Banachův prostor, jehož některé vlastnosti jsou těsně provázány s topologickými vlastnostmi kompaktu K .

Tvrzení 44 (Diniho kritérium stejnoměrné konvergence). *Ať K je kompaktní topologický prostor, $f_n: K \rightarrow \mathbb{R}$ posloupnost spojitých funkcí, že $f_{n+1} \geq f_n$, které konvergují bodově ke spojitě funkci $f: K \rightarrow \mathbb{R}$. Pak (f_n) konverguje stejnoměrně k f .*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Lemma 45 (O odmocnině). *Existuje posloupnost polynomů, která stejnoměrně konverguje k funkci $\sqrt{t}$ na $[0, 1]$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

konec 7. přednášky (10. 11. 2025)

Definice. Řekneme, že systém funkcí $\mathcal{F}$ zobrazujících X do Y odděluje body, pokud pro různé body $x, y \in X$ existuje $f \in \mathcal{F}$, že $f(x) \neq f(y)$.

Okruh a svaz jsou pojmy algebraické povahy. Nebudeme zde připomínat jejich obecné definice. Pouze poznamenejme, že pro $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset C(K, \mathbb{F})$, kde $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, tvoří systém $\mathcal{A}$ okruh, pokud je $\mathcal{A}$ podprostor uzavřený na násobení. Systém $\mathcal{A}$ je samoadjungovaný, pokud $\bar{f} \in \mathcal{A}$, kdykoliv $f \in \mathcal{A}$. Systém $\mathcal{A} \subset C(K, \mathbb{R})$ je svaz, pokud je uzavřený na max a min dvou (resp. konečně mnoha) funkcí.

Věta 46 (Stoneova-Weierstrassova věta). *Ať K je kompaktní topologický prostor.*

- (a) *Nechť $\mathcal{B} \subset C(K, \mathbb{R})$ je vektorový podprostor obsahující konstanty a oddělující body. Je-li $\mathcal{B}$ okruh nebo svaz, pak $\mathcal{B}$ je hustý v $C(K, \mathbb{R})$.*
- (b) *Nechť $\mathcal{B} \subset C(K, \mathbb{C})$ je vektorový podprostor obsahující konstanty a oddělující body, který je navíc samoadjungovaný. Pokud $\mathcal{B}$ je okruh, je $\mathcal{B}$ hustý v $C(K, \mathbb{C})$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Důsledek 47. *Polynomy s racionálními koeficienty tvoří hustou podmnožinu prostoru $C([0, 1])$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 48. *Nechť K je Hausdorffův kompaktní. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (a) *K má spočetnou váhu.*
- (b) *Existuje spočetně mnoho funkcí $\mathcal{A} \subset C(K)$, které oddělují body K .*
- (c) *$C(K)$ je separabilní.*

Speciálně, pokud K je metrizable kompaktní, pak $C(K)$ je separabilní.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Poznámka. Později uvidíme, že Hausdorffův kompaktní má spočetnou váhu, právě když je metrizable.

3.3. Kompaktifikace

Definice. Ať X je topologický prostor. Dvojice (j, Y) se nazývá *kompaktifikací* prostoru X , pokud $j: X \rightarrow Y$ je vnoření X na hustou podmnožinu kompaktního Hausdorffova prostoru Y . Často se jako kompaktifikace označuje pouze samotný prostor Y a zobrazení j se chápe jako inkluze. Řekneme, že kompaktifikace (j_1, Y_1) je *větší* než kompaktifikace (j_2, Y_2) , pokud existuje spojitě zobrazení $f: Y_1 \rightarrow Y_2$, že $f \circ j_1 = j_2$. Kompaktifikace (j_1, Y_1) a (j_2, Y_2) prostoru X nazýváme *ekvivalentní*, pokud existuje homeomorfismus $h: Y_1 \rightarrow Y_2$, který rozšiřuje id_X (formálněji, rozšiřuje $i_2 \circ i_1^{-1}$).

Příklad. Uzavřený interval $Y_1 = [0, 1]$ je kompaktifikací otevřeného intervalu $X = (0, 1)$ přičemž $j_1: (0, 1) \rightarrow [0, 1]$ je vnoření. Kružnici Y_2 lze přirozeným způsobem chápat jako kompaktifikaci X . Formálně $j_2(x) = \exp(2\pi i x)$ a Y_2 je jednotková kružnice v komplexní rovině. Kompaktifikace (j_1, Y_1) je větší než kompaktifikace (j_2, Y_2) .

Poznámka. Kompaktifikace Hausdorffova kompaktního prostoru X je homeomorfní s X . Je-li jedna kompaktifikace větší než druhá a druhá větší než první, pak jsou již ekvivalentní.

Definice. Topologický prostor X se nazývá *lokálně kompaktní*, pokud každý bod má kompaktní okolí.

Tvrzení 49 (Alexandrova kompaktifikace). *Nechť (X, τ) je Hausdorffův lokálně kompaktní prostor, který není kompaktní a $\infty \notin X$. Na prostoru $X \cup \{\infty\}$ uvažujme topologii σ generovanou bází topologie*

$$\mathcal{B} := \tau \cup \{\{\infty\} \cup (X \setminus K) : K \subseteq X \text{ je kompaktní}\}.$$

Pak $(X \cup \{\infty\}, \sigma)$ je kompaktifikace prostoru X .

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

konec 8. přednášky (24. 11. 2025)

Příklady. • Každý kompaktní Hausdorffův prostor je lokálně kompaktní.

- Euklidovské prostory jsou lokálně kompaktní.
- Diskrétní prostor je lokálně kompaktní.
- Prostor $[0, \omega_1)$ je lokálně kompaktní.

Lemma 50. *Nechť X je Hausdorffův lokálně kompaktní prostor. Pak*

- (a) *každý bod $x \in X$ má bázi okolí sestávající z kompaktních množin,*
- (b) *pokud je $A \subset X$ otevřený nebo uzavřený podprostor, pak je A lokálně kompaktní,*
- (c) *X je otevřená množina v každé své kompaktifikaci.*

Navíc, Hausdorffův topologický prostor je lokálně kompaktní právě když je homeomorfní otevřené podmnožině nějakého Hausdorffova kompaktu.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Definice. Říkáme, že kompaktifikace (j, bX) prostoru X je *jednobodová*, jestliže $|bX \setminus X| = 1$.

Lemma 51. *Hausdorffův topologický prostor má jednobodovou kompaktifikaci právě když je lokálně kompaktní a není kompaktní. Ať dále X je lokálně kompaktní prostor, který není kompaktní. Pak jednobodová kompaktifikace X je určena jednoznačně, až na ekvivalenci kompaktifikací a jednobodová kompaktifikace je nejmenší kompaktifikace X .*

Důkaz. Důkaz je snadný, byl vynechán, může být u zkoušky použit jakožto příklad navíc. □

Definice. Necht X a Y jsou topologické prostory a $\mathcal{F}$ systém funkcí zobrazujících X do Y . Řekneme, že $\mathcal{F}$ *odděluje body a uzavřené množiny*, pokud pro každou uzavřenou $F \subseteq X$ a $x \in X \setminus F$ existuje $f \in \mathcal{F}$, že $f(x) \notin f(F)$.

Lemma 52 (Tichonovovo vnoření). *At X je topologický prostor a $\mathcal{F} = \{f_i: X \rightarrow Y_i, i \in I\}$ soubor spojitých zobrazení a uvažujme diagonální zobrazení $\Delta\mathcal{F} := \Delta_I f_i: X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$. Pokud $\mathcal{F}$ odděluje body, pak $\Delta\mathcal{F}$ je prosté. Pokud navíc $\mathcal{F}$ odděluje body a uzavřené množiny, pak $\Delta\mathcal{F}$ je vnoření.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 53 (Tichonovova krychle). *Necht X je $T_{3\frac{1}{2}}$ topologický prostor. Pak existuje množina I taková, že X se vnoří do $[0, 1]^I$.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Důsledek 54. *Každý $T_{3\frac{1}{2}}$ topologický prostor má nějakou kompaktifikaci.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Definice. At X je $T_{3\frac{1}{2}}$ topologický prostor. Označme $\mathcal{F} := \mathcal{C}(X, [0, 1])$ a $\Delta\mathcal{F}: X \rightarrow [0, 1]^{\mathcal{F}}$ příslušné diagonální vnoření. Pak kompaktifikace $(\Delta\mathcal{F}, \overline{\Delta\mathcal{F}(X)})$ (nebo kterákoli s ní ekvivalentní) se nazývá *Čechova-Stoneova* (nebo beta obal) a značí se βX .

Věta 55 (Charakterizace beta obalu). *At X je $T_{3\frac{1}{2}}$ topologický prostor a (j, Y) kompaktifikace X . Pak jsou následující podmínky ekvivalentní.*

- (a) Y je Čechova-Stoneova kompaktifikace X .
- (b) Každou spojitou funkci $f: X \rightarrow [0, 1]$ lze spojitě rozšířit na celé Y , tj. existuje spojitá $\tilde{f}: Y \rightarrow [0, 1]$ splňující $\tilde{f} \circ j = f$.
- (c) Každou spojitou funkci $f: X \rightarrow Z$ do kompaktního Hausdorffova prostoru Z lze spojitě rozšířit na celé Y , tj. existuje spojitá $\tilde{f}: Y \rightarrow Z$ splňující $\tilde{f} \circ j = f$.
- (d) Y je největší kompaktifikace X .

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Poznámka. Každou spojitou omezenou funkci $T_{3\frac{1}{2}}$ prostoru X lze spojitě rozšířit na (omezenou) spojitou funkci $\beta X \rightarrow \mathbb{R}$. Tedy je možné ztotožnit Banachovy prostory ℓ_∞ a $C(\beta\mathbb{N})$.

Beta obal jednoduchých topologických prostorů může být velice komplikovaný. Příkladem je prostor $\beta\mathbb{N}$, který lze například popsat jako prostor všech ultrafiltrů na $\mathbb{N}$ s vhodnou topologií. Blíže viz. cvičení.

4. Metrizovatelnost a čechovská úplnost

4.1. Metrizovatelnost

Lemma 56. *Topologický prostor se spočetnou bází je Lindelöfov.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

konec 9. přednášky (1. 12. 2025)

Je-li (X, ρ) metrický prostor a $\sigma = \min\{\rho, 1\}$, pak σ je opět metrika na X , která navíc generuje stejnou topologii na X jako metrika ρ .

Tvrzení 57. *Spočetný součin metrických prostorů (X_n, ρ_n) , $n \in \mathbb{N}$ je metrizovatelný metrikou*

$$\rho(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\{\rho_n(x_n, y_n), 1\}}{2^n}, \quad x, y \in \prod X_n.$$

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 58 (Urysohnova metrizační věta). *Každý T_3 topologický prostor se spočetnou bází je metrizovatelný.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Poznámka. Z důkazu předchozí věty plyne, že každý separabilní metrizovatelný prostor má metrizovatelnou kompaktifikaci a lze ho vnořit do Hilbertovy kostky $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Důsledek 59. *Kompaktní Hausdorffův prostor je metrizovatelný právě když má spočetnou váhu.*

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. □

Důsledek 60. *Spojitý obraz metrizovatelného kompaktu je metrizovatelný kompakt, pokud je obraz Hausdorffův.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

4.2. Úplnost v metrických prostorech

Připomeňme, že metrický prostor je *úplný*, pokud každá cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Nechť I je množina. Připomeňme, že na $\ell_{\infty}(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ omezená}\}$ definujeme metriku předpisem $\rho(f, g) := \|f - g\|_{\infty} = \sup_{i \in I} |f(i) - g(i)|$. Pak $(\ell_{\infty}(I), \rho)$ je úplný metrický prostor.

Věta 61 (Univerzalita $\ell_{\infty}(I)$). *Nechť (M, d) je metrický prostor, pak existuje izometrické vnoření $\varphi : M \rightarrow \ell_{\infty}(M)$.*

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. □

Důsledek 62 (O zúplnění). *Každý metrický prostor (X, ρ) má zúplnění, tj. existuje úplný metrický prostor (Y, σ) a izometrické vnoření $j : X \rightarrow Y$ splňující, že $j(X)$ je hustá v Y .*

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. □

Tvrzení 63. Každé stejnoměrně spojitě zobrazení z podprostoru A metrického prostoru (X, ρ) do úplného metrického prostoru (Y, σ) lze rozšířit na stejnoměrně spojitě zobrazení z $\bar{A}$ do Y .

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. $\square$

Důsledek 64 (Jednoznačnost zúplnění). Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $(Y_1, \sigma_1), (Y_2, \sigma_2)$ úplné metrické prostory a $e_1: X \rightarrow Y_1, e_2: X \rightarrow Y_2$ dvě izometrická zobrazení splňující $\overline{e_1(X)}^{Y_1} = Y_1$ a $\overline{e_2(X)}^{Y_2} = Y_2$. Pak existuje izometrické surjektivní zobrazení $e: Y_1 \rightarrow Y_2$ splňující $e_2 = e \circ e_1$.

Důkaz. Idea důkazu byla, ale některé jeho části byly vynechány, tyto mohou být u zkoušky použity jakožto příklad navíc. $\square$

Závěrem zopakujeme dvě známá tvrzení z Matematické analýzy o úplných metrických prostorech.

Věta 65 (Cantor). Metrický prostor (X, ρ) je úplný, právě když pro každou posloupnost (F_n) neprázdných uzavřených podmnožin X splňující $F_n \subset F_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } F_n = 0$ je $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ jednobodová množina.

Věta 66 (Baireova věta). V úplném metrickém prostoru je průnik spočetně mnoha hustých otevřených množin opět hustá množina.

Definice. Řekneme, že topologický prostor je *Baireův* pokud je průnik spočetně mnoha hustých otevřených množin opět hustá množina.

4.3. Úplná metrizovatelnost

Definice. Topologický prostor se nazývá *úplně metrizovatelný*, pokud na něm existuje úplná metrika generující jeho topologii.

Tvrzení 67. Spočetný součin úplně metrizovatelných prostorů je úplně metrizovatelný.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Věta 68 (Úplně metrizovatelné prostory). Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

- (i) X je G_δ -podmnožinou nějakého svého zúplnění.
- (ii) X je G_δ -podmnožinou každého svého zúplnění.
- (iii) Kdykoliv se X vnoří do úplného metrického prostoru, pak se tam vnoří jakožto G_δ -podmnožina.
- (iv) Prostor X je úplně metrizovatelný.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

konec 10. přednášky (8. 12. 2025)

Definice. Tichonovův prostor X se nazývá *čechovsky úplný*, pokud je G_δ v βX .

Lemma 69 (O přírůstku kompaktifikací). Jsou-li (j_1, Y_1) a (j_2, Y_2) kompaktifikace topologického prostoru X a $f: Y_1 \rightarrow Y_2$ splňuje $f \circ j_1 = j_2$, pak $f(Y_1 \setminus j_1(X)) = Y_2 \setminus j_2(X)$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. $\square$

Tvrzení 70 (Charakterizace čechovsky úplných prostorů). Pro Tichonovův prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.

- (a) X je čechovsky úplný.

(b) X je G_δ v každé kompaktifikaci.

(c) X je G_δ v nějaké kompaktifikaci.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Poznámka. V předchozí větě nelze ekvivalentně říci G_δ v každém kompaktu. Například prostor $[0, 1]^{\omega_1}$ není G_δ v $[0, 2]^{\omega_1}$.

(Důkaz bude na cvičení.)

Věta 71 (Frolíkova vnitřní charakterizace čechovské úplnosti). *Nechť X je Tichonovův topologický prostor. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní.*

(i) X je čechovsky úplný.

(ii) Existuje posloupnost otevřených pokrytí $\{\mathcal{U}_n\}$ prostoru X s vlastností, že pro každý centrováný systém uzavřených množin $\mathcal{F}$ takový, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $F \in \mathcal{F}$ a $U \in \mathcal{U}_n$, že $F \subset U$, je $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Důsledek 72 (Čech). *Metrizovatelný prostor X je úplně metrizovatelný, právě když je čechovsky úplný.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

konec 11. přednášky (15. 12. 2025)

Příklady. • Každý lokálně kompaktní Hausdorffův prostor je čechovsky úplný.

• Prostor iracionálních čísel je čechovsky úplný, prostor racionálních čísel není čechovsky úplný.

Věta 73 (Baireova věta v čechovsky úplných prostorech). *Každý čechovsky úplný prostor je Baireův.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Tvrzení 74 (Zachovávání čechovské úplnosti operacemi). *Čechovská úplnost se zachovává*

(i) *topologickou sumou,*

(ii) *spočetným součinem,*

(iii) *uzavřeným podprostorem.*

Důkaz. Důkaz byl, může být zkoušen. □

Věta 75. *Součin libovolně mnoha čechovsky úplných prostorů je Baireův.*

Důkaz. Důkaz na přednášce předveden nebyl, zkoušen nebude. □

Poznámka. Čechovská úplnost se nezachová na libovolné součiny a existují tak prostory, které jsou Bairovy a nejsou čechovsky úplné.

5. Topologické grupy

Tato část sylabu se nestihla přednést. Pro přehled je možné se podívat do připravovaných skript. Podrobněji tato látka bude přednesena v kurzu Obecná topologie 2.

konec 12. přednášky (5. 1. 2026)