CVIČENÍ 1

1. Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí
a) $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ na $\mathbb{R}$; b) $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ na $[1,\infty)$; c) $f_n(x) = \frac{2nx}{n^2+x^2}$ na $[0,1]$ a na $[1,\infty)$;
d) $f_n(x) = n \cdot \left(\sqrt{x+1/n} - \sqrt{x}\right)$ na $(0,\infty)$; e) $f_n(x) = \frac{(nx+2)^2}{n^2x^2+4}$ na $[0,2]$ a na $[2,\infty)$;
f) $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n+3^n}$ na $[0,\infty)$; g) $f_n(x) = \exp\left(n(|x-1|-2)\right)$ na $(0,1]$ a na $[1,3)$;

2. Nechť $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ a $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení (tj. podejte důkaz že tvrzení ne/platí).
(Připomeňme, že funkce $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ je 1-Lipschitzovská, pokud pro každé $x, y \in [0,1]$ platí $|g(x) - g(y)| \leq |x-y|$.)
a) Pokud funkce f_n jsou 1-Lipschitzovské a $f_n(x) \to f(x)$ pro $x \in [0,1]$, pak funkce f je 1-Lipschitzovská.
b) Pokud funkce f_n jsou 1-Lipschitzovské a $f_n(x) \to f(x)$ pro $x \in [0,1]$, pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$.
c) Platí, že $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$, právě když $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b) pro každé $0 < a < b < 1$.

Další užitečné zdroje příkladů:
- Ilja Černý: Inteligentní kalkulus. Online zde:
`http://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html`
- Řešené příklady od Ondřeje Bouchaly. Online zde: (viz. cvičení k Matematické analýze 3):
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/`
- Příklady od Kristýny Kuncové. Online zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/`

CVIČENÍ 2

1. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí

a) $f_n(x) = e^{-x^2/n}$ na $\mathbb{R}$; b) $f_n(x) = n^2\Big(1 - \cos(\frac{x}{n})\Big)$ na $\mathbb{R}$;

c) $f_n(x) = e^{n(x-1)}$ na $(0,1)$; d) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$ na $(0,\infty)$; e) $f_n(x) = \frac{\log nx}{n}$ na $(0,\infty)$;

f) $f_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$ na $[0,\infty)$; g) $f_n(x) = \frac{n^2-x^2}{n^2+x^2}$ na $\mathbb{R}$; h) $f_n(x) = x^n e^{-x^2/n}$ na $(-1,1)$;

i) $f_n(x) = nx\log(1+\frac{1}{nx})$ na $(0,\infty)$; j) $f_n(x) = n\sin\frac{x}{n}$ na $\mathbb{R}$; k) $f_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{x}\Big(2^{\frac{x^2}{\sqrt{n}}} - 1\Big)$ na $(0,\infty)$;

2. Nechť jsou dány funkce $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ a $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení (tj. podejte důkaz že tvrzení ne/platí).

a) $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$, právě když existuje množina $E \subset [0,1]$ míry nula splňující že $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1] \setminus E$.

b) Pokud jsou funkce f_n a f spojité, pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$, právě když $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \to 0$.

c) Pokud jsou funkce f_n a f spojité, pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$, právě když existuje množina $E \subset [0,1]$ míry nula splňující že $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1] \setminus E$.

CVIČENÍ 3

1. Odpovězte na otázky: Pro jaké x řada konverguje? Na jakém intervale konverguje řada stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně? Na jakém intervale je součet řady spojitá funkce?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{x^2}{n^2})$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-(n+x^2))$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-x^2+6x-8)^n$;
f) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-n^2x^2}$; g) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{x^2\sin^2 x}{n^2})$; h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$; i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$;

2. Uvažujte funkci $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (3/4)^n g(4^n x)$, kde $g(x)$ je 2-periodické rozšíření funkce $|x|$ (tj. $g(x+2) = g(x)$). Dokažte, že f je spojitá funkce, která nemá v žádném bodě vlastní derivaci.

Hint: Důkaz spojitosti je standardní. Pro důkaz neexistence derivace v bodě x ukažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $\delta_k \in \{\pm \frac{1}{2\cdot 4^k}\}$ takové, že

$$|g(4^n x + 4^n \delta_k) - g(4^n x)| \begin{cases} = 0 & n > k \\ = \frac{1}{2} & k = n \\ \le 4^n \delta_k & n < k. \end{cases} \tag{1}$$

Použijte pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ odhad

$$\Big|\frac{f(x+\delta_k) - f(x)}{\delta_k}\Big| \ge \Big|\sum_{n=k}^{\infty} \Big(\frac{3}{4}\Big)^n \frac{g(4^n x + 4^n \delta_k) - g(4^n x)}{\delta_k}\Big| - \sum_{n=1}^{k-1} \Big(\frac{3}{4}\Big)^n \frac{|g(4^n x + 4^n \delta_k) - g(4^n x)|}{\delta_k}$$

a s pomocí (1) odvoďte, že $\Big|\frac{f(x+\delta_k)-f(x)}{\delta_k}\Big| \to \infty$ a tedy f nemá derivaci v bodě x.

CVIČENÍ 4

1. Dokažte, že funkce f daná předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(1 + \frac{x}{n})}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

je spojitá na $\mathbb{R}$ a vyjádřete $f'(0)$ jako součet řady.

2. Dokažte, že pro funkci f danou předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

platí $f \in \mathcal{C}([-1, 1])$. Spočtěte $f'(\frac{1}{2})$ a $f'(0)$.

3. Dokažte, že pro funkci $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in (1, \infty)$ platí $f \in \mathcal{C}^{\infty}((1, \infty))$.

4. Dokažte, že pro funkci f danou předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \log(\tfrac{2x-2}{n^3} + 3), \quad x \in (0, \infty)$$

platí $f \in \mathcal{C}((0, \infty))$. Ukažte, že tato funkce má vlastní derivaci na intervalu $[1, \infty)$ a že $\sup_{x \geq 1} |f'(x)| < \infty$.

5. Nechť funkce f je dána předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\cos\big(\tfrac{2x-1}{3}\pi\big) \Big)^n.$$

Nalezněte definiční obor f (tj. ta x pro která je řada konvergentní). Dále dokažte, že funkce f je na intervalu $(\frac{1}{2}, 2)$ spojitá, má na tomto intervalu vlastní derivaci a najděte maximum funkce f na intervalu $[1, \frac{5}{4}]$.

6. Ať $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Rozhodněte, jaké implikace platí mezi následujícími tvrzeními.

- Funkce g je spojitá skoro všude a $|g(x)| < 1$ pro každé $x \in [0, 1]$.
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (g(x))^n$ je stejnoměrně konvergentní na $[0, 1]$.
- Funkce g je spojitá a $|g(x)| < 1$ pro každé $x \in [0, 1]$.

CVIČENÍ 5

1. Dokažte, že funkce f daná předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n^2\Big(\sin(\frac{x}{n}) - \frac{x}{n} + \frac{x^3}{6n^3}\Big), \quad x \in \mathbb{R}$$

je spojitá na $\mathbb{R}$.

2. Dokažte, že funkce f daná předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}} \operatorname{arctg}\Big(2 + \frac{3x - x}{n^2}\Big), \quad x \in \mathbb{R}$$

je spojitá na $\mathbb{R}$ a vyjádřete $f'(1)$ jako součet řady.

3. Dokažte, že funkce f daná předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \log\Big(1 + \frac{2x}{x^2 + n^2}\Big), \quad x \in \mathbb{R}$$

je spojitá na $[0, \infty)$.
BONUSOVÁ OTÁZKA: Je řada stejnoměrně konvergentní na $[0, \infty)$?

4. Uvažujte funkci f definovanou předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{sgn}(\operatorname{tg} x))^n \sqrt{n} 3^n (\operatorname{tg} x)^{2n}}{n+1}.$$

Nalezněte definiční obor zadané funkce a dokažte, zda je tato funkce na svém definičním oboru spojitá.

5. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{n+20} x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n + (-2)^n}{n^2} (x-1)^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}$ $(a, b > 0)$
e) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\sqrt{n}}} x^n$ $(a > 0)$

6. Najděte mocninnou řadu, která

(a) Diverguje pro $x = 0$.

(b) Konverguje pro $x = 5$, ale nikde jinde.

(c) Má střed konvergence v 0, poloměr konvergence roven 2 a konverguje pro 2, ale diverguje pro -2.

CVIČENÍ 6

1. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n$ $(a > 1)$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} x^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{n} x^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n$ $(a, b > 0)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n!} x^n$ (Hint: na kruhu konvergence použijte Stirlingův vzorec: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n n! = \sqrt{2\pi}$) f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}$

2. Vyjádřete následující funkce jako mocninnou řadu o středu 0:

a) e^{-x^2} b) $(1+x)\log(1+x)$ c) $\frac{1}{(1-x)^2}$ d) $\operatorname{arctg} x$ e) $\operatorname{arctg}\left(\frac{2-2x}{1+4x}\right)$

3. Sečtěte řady všude uvnitř kruhu konvergence:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+5}}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2 x^n$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n+3) x^{2n}$

4. Řekneme, že reálná funkce f je *vyjádřitelná na okolí nuly jako mocninná řada* (zkráceně "je (MR)"), pokud existuje $\delta > 0$ a posloupnost $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ splňující, že $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-\delta, \delta)$. Určete, jaké implikace platí mezi následujícími tvrzeními o reálné funkci f definované na okolí nuly a své tvrzení dokažte.

(a) f je (MR).

(b) f je (MR) a existuje $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující $f^{(k)}(0) \neq 0$.

(c) Existuje $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a g která je (MR) a $g(0) \neq 0$ tak, že na nějakém otevřeném okolí nuly platí $f(x) = x^k g(x)$.

(d) f má na okolí nuly spojité derivace všech řádů (tj. $f \in C^\infty((-\delta, \delta))$ pro nějaké $\delta > 0$).

CVIČENÍ 7

1. Rozviňte funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ **v mocninné řady se středem v bodě** $x_0 = -1$ **a stanovte poloměr konvergence těchto řad.**

2. Rozviňte funkci $\exp(x)$ **v mocninnou řadu se středem v bodě** $x_0 = 1$ **a stanovte poloměr konvergence této řady.**

3. Sečtěte řady všude na intervalu konvergence:
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$

4. Rozviňte funkce $f(x) = \frac{1}{x-3}$, $g(x) = \frac{x}{x-3}$ **v mocninné řady se středem v bodech** $x_0 = 0$ **a** $x_0 = 1$ **a stanovte poloměr konvergence těchto řad.**

5. Rozviňte funkce $f(x) = \exp(x)$, $g(x) = x\exp(x)$ **v mocninné řady se středem v bodě** $x_0 = -17$ **a stanovte poloměr konvergence těchto řad.**

6. Sečtěte následující řady všude na intervalu konvergence
a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{3^n\, n!}\, x^n$

7. Vyjádřete následující funkci jako mocninnou řadu o středu 0: a) $\frac{4}{(x-3)(x+1)}$

CVIČENÍ 9

1. Sečtěte řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{3^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(n+1)2^n}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2^n\, n!}$

2. Sečtěte řady všude na intervalu konvergence:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n+2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+1}{2n^2+n}x^{2n+1}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n-1}{n!}x^n$

3. Určete, zda mají následující funkce f konečnou variaci na $[0,1]$

a) $f(x)=\sqrt{x}$ b) $f(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 0 & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\in(0,1]\\ 0 & x=0\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2} & x\in(0,1]\\ 0 & x=0\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x} & x\in[0,1)\\ 0 & x=1\end{cases}$

Výsledky:

1. a) $-\log 2$ b) 2 c) $\frac{\pi}{4}-1$ d) 8 e) $\frac{3}{128}$ f) $2\,\mathrm{arctg}(1/2)-1$ g) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ h) $-2\log(\frac{2}{3})-\frac{5}{3}$ i) $-\frac{1}{4\sqrt{e}}$

2. a) $e^x(x^4+x^3)$, $x\in\mathbb{R}$ b) $-x+\arctan x-x\log(1+x^2)$, $x\in[-1,1]$ c) $(1+x)e^{-x}-1$, $x\in\mathbb{R}$

CVIČENÍ 10

1. Určete, jaké implikace platí mezi následujícími tvrzeními o funkci $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(a) f má konečnou variaci na $[0,1]$,

(b) $|f|$ má konečnou variaci na $[0,1]$,

(c) f je omezená.

2. Určete, které z následujících funkcí $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mají konečnou variaci, které jsou absolutně spojité a které jsou Lipchitzovké.

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = \sqrt{x}$ d) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ e) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

3. Určete, jaké implikace platí mezi následujícími tvrzeními o funkci $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(a) f je absolutně spojitá na $[0,1]$,

(b) $|f|$ je absolutně spojitá na $[0,1]$,

(c) f má omezenou derivaci na $[0,1]$.

4. Ukažte, že

1. $BV([0,1])$ je vektorový podprostor prostoru $\ell_\infty([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \colon f \text{ je omezená}\}$,
2. předpis $\|f\|_{BV} := \|f\|_\infty + V(f)$ definuje normu na $BV([0,1])$,
3. Je–li ρ metrika na $BV([0,1])$ generovaná normou $\|\cdot\|_{BV}$, pak $(BV([0,1]), \rho)$ je úplný metrický prostor.
   Hint: můžete použít, že $(\ell_\infty([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ je úplný

5. Ukažte, že

1. $AC([0,1])$ je vektorový podprostor prostoru $BV([0,1])$,
2. předpis $\|f\|_{AC} := \|f\|_\infty + \|f'\|_{L_1}$ definuje normu na $AC([0,1])$,
3. je–li ρ metrika na $AC([0,1])$ generovaná normou $\|\cdot\|_{AC}$, pak $(AC([0,1]), \rho)$ je úplný metrický prostor,
   Hint: použijte úplnost prostoru L_1, Newton-Leibnitzovu formuli pro absolutně spojité funkce a záměnu limity a integrálu
4. pro $f \in AC([0,1])$ platí $\|f\|_{AC} = \|f\|_{BV}$.
   Hint: je třeba ukázat, že $V(f) = \|f'\|_{L_1}$. Pro důkaz nerovnosti $\leq$ použijte definici variace a Newton-Leibnitzovu formuli pro absolutně spojité funkce. Pro důkaz nerovnosti $\geq$ postupujte takto: Nechť $F(t) = V(f; 0, t)$ je variace f na $[0,t]$. Pak F je neklesající, $|f(s) - f(t)| \leq F(s) - F(t)$ pro $0 \leq t \leq s \leq 1$. Tedy $|f'| \leq F'$ skoro všude na $[0,1]$. Odtud odvoďte, že $\|f'\|_{L_1} \leq F(1) - F(0) = V(f)$.

CVIČENÍ 11

1. Sestavte Fourierovu řadu k 2π-periodickému prodloužení následujících funkcí

a) $f(x) = e^x$, $x \in (-\pi, \pi]$ b) $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi)$ c) $f(x) = x^2$, $x \in [0, 2\pi)$

d) $f(x) = \sin^4 x$, $x \in [0, 2\pi)$ (Hint: vyjádřete funkci jako trigonometrickou řadu, nemusíte pak počítat žádný integrál)

e) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{6}, \pi] \\ \cos(3x) & x \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) \end{cases}$ f) $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $x \in (-\pi, \pi]$ g) $f(x) = \begin{cases} -x & x \in [-\pi, 0), \\ x & x \in [0, \pi) \end{cases}$

h) $f(x) = \operatorname{sgn}(x) + \sin^2 x$, $x \in [-\pi, \pi)$

2. Které koeficienty Fourierovy řady funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ jsou nulové, jestliže platí

(a) $f(x + \pi) = -f(x)$

(b) $f(x + \pi) = f(x)$

(c) $f(-x) = f(x)$ a $f(x + \pi) = -f(x)$

———-VÝSLEDKY———-

1. a) b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$ c) $\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{4}{n^2} \cos(nx) - \frac{4\pi}{n} \sin(nx))$ d) $\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x)$

e) $\frac{1}{3\pi} + \frac{1}{6} \cos(3x) + \sum_{n=1, n\neq 3} \frac{6 \cos(n\pi/6)}{(9-n^2)\pi} \cos(nx)$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin((2n-1)x)$

g) $\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2n-1)^2} \cos((2n-1)x)$ h) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin((2n-1)x)$

CVIČENÍ 12

1. Uvažujte 2π-periodické prodloužení následujících funkcí a rozhodněte zda příslušná Fourierova řada konverguje bodově/lokálně stejnoměrně/stejnoměrně na $\mathbb{R}$ a určete její součet.

a) $f(x) = e^x$, $x \in (-\pi, \pi]$ b) $f(x) = \sin^4 x$, $x \in [0, 2\pi)$ c) $f(x) = x^2$, $x \in [0, 2\pi)$ d) $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $x \in (-\pi, \pi]$

e) $f(x) = \begin{cases} -x & x \in [-\pi, 0), \\ x & x \in [0, \pi) \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{6}, \pi] \\ \cos(3x) & x \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) \end{cases}$ g) $f(x) = \operatorname{sgn}(x) + \sin^2 x$, $x \in [-\pi, \pi)$

2. Rozviňte následující funkce do sinové/kosinové Fourierovy řady. Nalezněte intervaly, kde řada konverguje (bodově/stejnoměrně/lokálně stejnoměrně) a určete její součet. Určete pak součet číselných řad, pokud je v zadání číselná řada uvedena.

a) x^2 na $(0, \pi)$ do sinové řady b) $\operatorname{sgn}(\sin(3x))$ na $[0, \pi)$ do cosinové řady. Určete součet $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)}$

c) $\cos(ax)$ pro $a > 0$ na $[0, \pi)$ do sinové řady

3. Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 0 & x \in (\frac{1}{3}, \pi] \end{cases}$$

Rozviňte ji v cosinovou Fourierovu řadu, tj. nalezněte koeficienty a_k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx), \quad x \in (0, \pi) \setminus \{\tfrac{1}{3}\}.$$

(nejprve nalezněte příslušné koeficienty a pak s pomocí vět z přednášky dokažte, že splňují žádanou rovnost)

4. Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [-\pi, \pi) \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [-\pi, \pi) \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

2π-periodicky dodefinovanou na $\mathbb{R}$. Nalezněte Fourierovu řadu této funkce a určete součet Fourierovy řady na $\mathbb{R}$.

5. Sečtěte $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin(nx)$ pro $q \in (-1, 1)$. Je tato řada Fourierovou řadou svého součtu?
(*Hint:* použijte komplexní čísla, tj. $\sin(nx) = \operatorname{Im}(e^{inx})$)

———-VÝSLEDKY———-

Výsledky týkající se konvergence jsou uvedeny na uzavřených intervalech délky 2π.

1. a) $s^f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (-\pi, \pi) \\ \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2} & x \in \{\pm\pi\} \end{cases}$, konvergence je lokálně stejnoměrná na $(-\pi, \pi)$ b) $s^f(x) = f(x)$, konvergence je stejnoměrná na $[0, 2\pi]$ c) $s^f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0, 2\pi) \\ 2\pi^2 & x \in \{0, 2\pi\} \end{cases}$, konvergence je lokálně stejnoměrná na $(0, 2\pi)$ d) $s^f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & x \in \{\pm\pi\} \end{cases}$, konvergence je lokálně stejnoměrná na $(-\pi, 0)$ a na $(0, \pi)$ e) $s^f(x) = f(x)$, konvergence je stejnoměrná na $[-\pi, \pi]$ f) $s^f(x) = f(x)$, konvergence je stejnoměrná na $[-\pi, \pi]$ g) $s^f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & x \in \{\pm\pi\} \end{cases}$, konvergence je lokálně stejnoměrná na $(-\pi, 0)$ a na $(0, \pi)$

2. a) $s^f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) f(x) & x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & x \in \{\pm\pi\} \end{cases}$, konvergence je lokálně stejnoměrná na $(-\pi, \pi)$, $s^f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{2\pi}{k} (-1)^{k+1} +$

$\frac{4}{\pi k^3}((-1)^k - 1)\Big) \sin(kx)$ b) $s^f(x) = \begin{cases} f(|x|) & x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \\ 1 & x \in \{\pm\pi, 0\} \end{cases}$, konvergence je lokálně stejnoměrná na $(0, \frac{\pi}{3}) + k\frac{\pi}{3}$, $s^f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{\cos((6k+2)x)}{6k+2} - \frac{\cos((6k+4)x)}{6k+4} \right)$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

c) $s^f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) \cos(ax) & x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, konvergence je lokálně stejnoměrná na $[-\pi, 0)$ a na $(0, \pi]$, $s^f(x) = \sum_{k=1, k \neq a}^{\infty} \frac{2k}{\pi(k^2 - a^2)} (1 - (-1)^k \cos(a\pi)) \sin(kx)$

3. $a_0 = \frac{1}{9\pi}$, $a_k = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(k/3)}{3k} + \frac{\cos(k/3)}{k^2} - \frac{1}{k^2} \right)$ **4.** $s^f(x) = \begin{cases} x & x \in [-\pi, \pi) \\ 0 & x = \pi \end{cases}$, $s^f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \sin(kx)$

5. ano, řada je Fourierovou řadou svého součtu; součet je roven $\frac{q \sin x}{1 + q^2 - 2q \cos x}$

CVIČENÍ 13

1. S pomocí Parsevalovy rovnosti odvoďte z rozvoje funkce $f(x)$ do Fourierovy řady na $[-\pi, \pi]$, čemu je roven součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

a) $f(x) = x^2$, $a_n = \frac{1}{n^4}$

b) $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \in (-\pi/2, \pi/2), \\ 0, & x \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi] \end{cases}$, $a_n = \left(\frac{4}{\pi((2n-1)^2-4)}\right)^2$

(Hint: můžete použít vzorce $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - \frac{1}{2}\cos(x+y)$ a $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$)

c) f je sudá a na intervalu $[0, \pi]$ je definována předpisem $f(x) = \frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|$, $x \in [0, \pi)$, $a_n = \left(\frac{4}{(4n+2)^2}\right)^2$

2. Nalezněte spočetnou hustou podmnožinu metrického prostoru $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3. Na množině $\mathbb{R}$ nalezněte 4 metriky d_1, d_2, d_3, d_4 takové, že $(\mathbb{R}, d_i)$ není homeomorfní $(\mathbb{R}, d_j)$ pro $i \neq j$.

4. Nalezněte metrický prostor M a klesající posloupnost neprázdných uzavřených množin $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ takovou, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

5. Na $\mathbb{R}$ uvažujte metriku ρ danou předpisem $\rho(x,x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$, $\rho(x,0) = \frac{1}{|x|}$ pro $x \neq 0$, $\rho(0,y) = \frac{1}{|y|}$ pro $y \neq 0$ a $\rho(x,y) = \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}$ pokud $xy \neq 0$. Zjistěte, zda $(\mathbb{R}, \rho)$ je úplný a zda je kompakrní. Najděte všechny otevřené podmnožiny a všechny kompaktní podmnožiny. Jsou jednobodové množiny otevřené?

6. Ukažte, že c_0 je separabilní Banachův prostor, jehož jednotková koule není totálně omezená.

———-VÝSLEDKY———-

1. a) $\frac{\pi^4}{90}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $(\frac{\pi^2}{6} - \frac{4}{\pi^2} - \frac{\pi}{4})\frac{\pi^2}{4}$

1. Je Cantorovo diskontiunuum souvislá množina?

2. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^2$ jsou souvislé množiny. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení.

(a) $A \cap B$ je souvislá množina.

(b) Pokud je $A \cap B \neq \emptyset$, pak $A \cup B$ je souvislá množina.

(c) $A \setminus B$ je souvislá množina.

(d) Pokud jsou A a B křivkově souvislé a $A \cap B \neq \emptyset$, pak $A \cup B$ je křivkově souvislá množina.

3. Dokažte, že každá konvexní množina v $\mathbb{R}^n$ je křivkově souvislá.

4. Sestrojte dvě disjunktní souvislé množiny A a B v $[0,1]^2$ takové, že $\{(0,0),(1,1)\} \subset A$ a $\{(1,0),(0,1)\} \subset B$. (stačí obrázek)

5. Uvažujte $M = \{f \in C([0,1])\colon f(0) = 0,\ \rho_{\sup}(f,0) \leq 1\} \subset (C([0,1]), \rho_{\sup})$. Rozhodněte, které z následujících vlastností má M: separabilní, omezený, totálně omezený, úplný, souvislý.

6. Je množina $\{(0,1)\} \cup \{(t,0)\colon t \in [0,1]\} \cup \{(\frac{1}{n}, t)\colon t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$ křivkově souvislá?

8. Dokažte, že pokud (M,d) je souvislý metrický prostor a $f : M \to \mathbb{R}$ lokálně konstantní (tj. pro každé $x \in M$ existuje $\varepsilon > 0$ že f je konstantní na $B(x,\varepsilon)$), pak f je konstantní.