I. TAYLORŮV POLYNOM

1. Najděte Taylorův polynom k-tého řádu v bodě 0 pro funkce:

a) $\mathrm{tg}(x),\ k=3$ b) $\sin(\sin x),\ k=5$ c) $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2},\ k=4$ d) $\cos(\sin x),\ k=5$ e) $\sin(1-\cos x),\ k=3$
f) $e^{2x-x^2},\ k=5$ g) $\frac{x}{e^x-1},\ k=4$ h) $\log(\cos x),\ k=6$

2. Odhadněte absolutní chybu aproximace $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ **na intervalu** $[-1/2, 1/2]$.

3. Spočtěte $\sqrt{5}$ **s přesností** 10^{-2}

4. Spočtěte limity

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(n^2 - \mathrm{cotg}^2(\frac{1}{n})\Big)$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin(\sin x) - \sin(2x)\sqrt[3]{1+x^2}}{x^5}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$
e) $\lim\limits_{n\to\infty} n^4\Big(\cos(\frac{1}{n}) - \exp(-\frac{1}{2n^2})\Big)$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$ g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(e^{(x^2)}-1) - 1 + \cos(\sqrt{2}x)}{x^4}$
h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+\sin x)^x - \exp(x^2) + \frac{x^3}{2}}{x^4}$ i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[6]{n^5}\Big(\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) - \frac{1}{\sqrt[6]{n}}\log(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}})\Big)$

Další příklady k procvičení lze nalézt například:

- v sekci I zde: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/doc/MFF/MA/ma2-2015-16.pdf`
- na webu kolegyně Kuncové zde: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie28.php`

Příklady zkouškové obtížnosti lze nalézt ve zkouškových písemkách z Matematiky III, které jsou vystaveny zde: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis`

———-VÝSLEDKY———-

1. a) $x+\frac{1}{3}x^3$ b) $x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5$ c) $1+2x+2x^2-2x^4$ d) $1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4$ e) $\frac{x^2}{2}$ f) $1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5$
g) $1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{720}x^4$ h) $-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6$
2. $\frac{1}{3840}$
3. $2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}+\frac{1}{2^9}-\frac{5}{2^{14}} = 2.23602294922$
4. a) $\frac{1}{120}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{1}{24}$ e) $-\frac{1}{12}$ f) $\frac{1}{3}$ g) $\frac{2}{3}$ h) $\frac{1}{6}$

II. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE, ÚVOD

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

1. Příklady na integrování "přímo":
a) $\int x^9 + \frac{1}{x} - 5e^x + x^{-3} - \cos x \,\mathrm{d}x$ b) $\int 2e^{3x} - \sqrt[5]{5-x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{x^2+3x+6}{x^4}\,\mathrm{d}x$ d) $\int x(1-x)^{10}\,\mathrm{d}x$

2. Příklady na integrování "per partes":
a) $\int x^3 \sin x \,\mathrm{d}x$ b) $\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$ c) $\int x^n e^x \,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$ d) $\int x \log x \,\mathrm{d}x$ e) $\int x e^x \cos x \,\mathrm{d}x$

3. Příklady na integrování pomocí substituce:
a) $\int \operatorname{cotg} x \,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x$ e) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,\mathrm{d}x$ f) $\int \frac{1}{x \log x \log(\log x)}\,\mathrm{d}x$

4. Další příklady k procvičení:
a) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int (2^x+3^x)^2\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{1}{x^2}\sin(\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,\mathrm{d}x$ e) $\int \frac{x^2}{(8x^3+27)^{2/3}}\,\mathrm{d}x$
f) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ g) $\int \frac{2^{2x}}{9^x-4^x}\,\mathrm{d}x$ h) $\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$ i) $\int x^2 \sin(2x)\,\mathrm{d}x$ j) $\int \sqrt{x}\log^2 x\,\mathrm{d}x$ k) $\int x^2 e^{-2x}\,\mathrm{d}x$
l) $\int \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$ m) $\int x^5 e^{x^3}\,\mathrm{d}x$ n) $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ o) $\int x \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ p) $\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$

Další příklady k procvičení primitivních funkcí lze nalézt například:

- na webu kolegyně Kuncové zde: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie28.php`
- ve skriptech Ilja Černý: Inteligentní kalkulus. Online zde: `http://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html`

Příklady zkouškové obtížnosti lze nalézt ve zkouškových písemkách z Matematiky III, které jsou vystaveny zde: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis`

———-VÝSLEDKY———-

1. a) $\frac{x^{10}}{10} + \log|x| - 5e^x - \frac{1}{2x^2} - \sin x$ na $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ b) $\frac{2}{3}e^{3x} + \frac{5(5-x)^{\frac{6}{5}}}{6},\ x\in\mathbb{R}$
c) $-\frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2} - \frac{2}{x^3}$ na $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ d) $-\frac{(1-x)^{11}}{11} + \frac{(1-x)^{12}}{12}$
2. a) $-x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x,\ x\in\mathbb{R}$ b) $\frac{1}{2}(e^x\sin x + e^x\cos x),\ x\in\mathbb{R}$ c) $I_n := \int x^n e^x\,\mathrm{d}x = x^n e^x - nI_{n-1};\ I_1 := xe^x - e^x,\ x\in\mathbb{R}$
d) $\frac{1}{4}(2x^2\log x - x^2),\ x\in(0,\infty)$ e) $\frac{1}{2}e^x(x\sin x + x\cos x - \sin x),\ x\in\mathbb{R}$
3. a) $\log|\sin x|$ na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi), k\in\mathbb{Z}$
b) $\frac{1}{3}\operatorname{tg} x^3$ na každém z intervalů $(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2}+k\pi}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}+k\pi}), k\in\mathbb{Z}$ c) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2,\ x\in\mathbb{R}$
d) $\log|\log x|$ na $(0,1)$ a $(1,\infty)$ e) $\sqrt{x^2+5},\ x\in\mathbb{R}$ f) $\log|\log(\log x)|$ na $(1,e)$ a (e,∞)
4. a) $\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}},\ D_f=(0,\infty)$ b) $\frac{4^x}{\log 4} + 2\frac{6^x}{\log 6} + \frac{9^x}{\log 9},\ D_f=\mathbb{R}$ c) $\cos(\frac{1}{x}),\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
d) $\frac{2}{\sqrt{\cos x}},\ D_f=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi)$ e) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27},\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2}\}$
f) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x,\ D_f=\mathbb{R}$ g) $-\frac{1}{2\log\frac{2}{3}}\log|1-(\frac{2}{3})^{2x}|,\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
h) $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2),\ D_f=\mathbb{R}$ i) $-\frac{2x^2-1}{4}\cos(2x) + \frac{x}{2}\sin(2x),\ D_f=\mathbb{R}$
j) $\frac{2}{3}x^{3/2}\left(\log^2 x - \frac{4}{3}\log x + \frac{8}{9}\right),\ D_f=(0,\infty)$ k) $-\frac{e^{-2x}}{2}(x^2+x+\frac{1}{2}),\ D_f=\mathbb{R}$
l) $-\frac{1}{x}(\log^2 x + 2\log x + 2),\ D_f=(0,\infty)$ m) $\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3},\ D_f=\mathbb{R}$ n) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}},\ D_f=(0,\infty)$
o) $2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 6(2-x)\sin\sqrt{x},\ D_f=(0,\infty)$ p) $\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4},\ D_f=\mathbb{R}$

II. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE, POKRAČOVÁNÍ

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

5. Příklady na integrování pomocí druhé věty o substituci:

a) $\int \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ $(a>0)$

6. Příklady, kde se musí funkce "lepit":

a) $\int |2x+1|\,\mathrm{d}x$ b) $\int |\cos x|\,\mathrm{d}x$ c) $\int \max\{x,x^2\}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \sqrt{x^6}\,\mathrm{d}x$ e) $\int \sin|2x-1|\,\mathrm{d}x$ f) $\int |\sin x+\cos x|\,\mathrm{d}x$
g) $\int e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$

7. Integrace racionálních funkcí:

a) $\int \frac{5x^6-20x^5+20x^4+x^2-4x+11}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{2x+1}{x^2+4x-5}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{8x^3-5x^2-15x+24}{(x+1)^2(2x^2-6x+5)}\,\mathrm{d}x$ e) $\int \frac{3x+1}{(9x^2-12x+6)^2}\,\mathrm{d}x$
f) $\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2}\,\mathrm{d}x$ g) $\int \frac{1}{x}\frac{\log(2x)}{\log^2(x)+3}$

———-VÝSLEDKY———-

5. a) $\mathrm{tg}(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ D_f=(-1,1)$ b) $\frac{1}{a^2}\sin(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a})=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}},\ D_f=\mathbb{R}$

6. a) $F(x)=\begin{cases}-(x^2+x) & x<-\frac12\\ x^2+x+\frac12 & x\ge-\frac12\end{cases}$ b) $F(x)=\begin{cases}\sin x+4k & x\in[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi],k\in\mathbb{Z}\\ -\sin x+4k+2 & x\in(\frac{\pi}{2}+2k\pi,3\frac{\pi}{2}+2k\pi),k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

c) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3} & x\in(-\infty,0)\\ \frac{x^2}{2} & x\in[0,1]\\ \frac{x^3}{3}+\frac16 & x\in(1,\infty)\end{cases}$ d) $\frac14|x|x^3,\ x\in\mathbb{R}$ e) $F(x)=\begin{cases}-\frac12\cos(2x-1) & x\ge\frac12\\ \frac12\cos(2x-1)-1 & x<\frac12\end{cases}$

f) $F(x)=\begin{cases}\cos x-\sin x+4k\sqrt{2}-2\sqrt{2} & x\in[-\pi+2k\pi,-\frac{\pi}{4}+2k\pi],k\in\mathbb{Z}\\ \sin x-\cos x+4k\sqrt{2} & x\in[-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi],k\in\mathbb{Z}\\ \cos x-\sin x+4k\sqrt{2}+2\sqrt{2} & x\in[\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\pi+2k\pi],k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$ g) $F(x)=\begin{cases}e^x-2 & x<0\\ -e^{-x} & x\ge0\end{cases}$

7. a) $x^5+x-\frac{7}{x-2},\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ b) $\log(x^2+4x+5)-3\,\mathrm{arctg}(x+2),\ D_f=\mathbb{R}$
c) $\frac32\log|x+5|+\frac12\log|x-1|,\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{1,-5\}$ d) $3\log|x+1|-\frac{2}{x+1}+\frac12\log(2x^2-6x+5)+2\,\mathrm{arctg}(2x-3),\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
e) $-\frac{1}{6(9x^2-12x+6)}+\frac{\sqrt2}{8}\mathrm{arctg}(\frac{3x-2}{\sqrt2})+\frac{3x-2}{4(9x^2-12x+6)}=\frac{\sqrt2}{8}\mathrm{arctg}(\frac{3x-2}{\sqrt2})+\frac{9x-8}{12(9x^2-12x+6)},\ D_f=\mathbb{R}$
f) $-\frac{x}{2}+\frac13\log|e^x-1|+\frac16\log(e^x+2),\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ g) $\frac12\log(\log^2x+3)+\frac{\log2}{\sqrt3}\mathrm{arctg}(\frac{\log x}{\sqrt3}),\ D_f=(0,\infty)$

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

8. Goniometrické substituce:

a) $\int \frac{\sin^3 x+\sin x}{\cos^3 x+\cos x}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{1}{\cos^2 x(4\sin^2 x-1)}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{\cos x-1}{\sin x-1}\,\mathrm{d}x$ e) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ f) $\int \frac{1}{5+\cos x}\,\mathrm{d}x$

9. Příklady s odmocninou:

a) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{x}{\sqrt{-x^2+2x+8}}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \sqrt{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x$

———-VÝSLEDKY———-

8. a) $\frac{3}{2}\log(\cos^2 x+1)-2\log|\cos x|$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$ b) $\frac{1}{3}\log(\cos x+2)-\frac{1}{2}\log(\cos x+1)+\frac{1}{6}\log(1-\cos x)=\frac{1}{6}\log\left(\frac{(1-\cos x)(\cos x+2)^2}{(1+\cos x)^3}\right)$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{k\pi\}$ c) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}x+\frac{2}{3\sqrt{3}}\log\left|\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1}\right|$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi,-\frac{\pi}{6}+k\pi\}$ d) Pro každé $k\in\mathbb{Z}$ je primitivní funkce na $(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2\pi+2k\pi)$ dána předpisem $F(x)=$

$$\begin{cases} -\log(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1)+2\log|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1|-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1} & x\in(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2\pi+2k\pi)\setminus\{2k\pi+\pi\}\\ 0 & x=2k\pi+\pi \end{cases}$$

e) $$F(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+k\pi(1-1/\sqrt{2}) & x\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi),\quad k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+k\pi(1-1/\sqrt{2}) & x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

f) $$F(x)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+k\frac{\pi}{\sqrt{6}} & \text{pro } x\in(-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi),k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi}{2\sqrt{6}}+k\frac{\pi}{\sqrt{6}} & \text{pro } x=\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

9. a) $\log(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1)-\log\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus(-1,1]$

b) $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+2}{4-x}}-\sqrt{-x^2+2x+8}$, $D_f=(-2,4)$

c) $-\frac{3}{2}\log\left|2(x+\sqrt{x^2+x+1})+1\right|+\frac{3}{4(x+\sqrt{x^2+x+1})+2}+2\log\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right|$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

d) $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x-3}-2\log(x+1+\sqrt{x^2+2x-3})$, $D_f=\mathbb{R}\setminus(-3,-1)$.

Jiné možnosti jak výsledek posledního příkladu zapsat jsoun například:

- $-2\log(x+1+\sqrt{x^2+2x-3})-\frac{2}{(x+1+\sqrt{x^2+2x-3})^2}+\frac{1}{4}(x+\sqrt{x^2+2x-3})+\frac{1}{8}(x+\sqrt{x^2+2x-3})^2$
- $\operatorname{sgn}(x+3)\Big(-2\log|t+1|+2\log|t+1|+\frac{2}{t+1}+\frac{2}{t-1}-\frac{2}{(t+1)^2}+\frac{2}{(t-1)^2}\Big)$, kde $t=\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$

III. NEWTONŮV INTEGRÁL

Vypočtěte následující integrály

1. a) $\int_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\log x|\,\mathrm{d}x$ e) $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$
f) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x\,\mathrm{d}x$

2. a) $\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$ b) $\int_0^{5\pi} \frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{-x^2+4x-3}}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x$
e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1}\,\mathrm{d}x$ f) $\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$

Další příklady k procvičení lze nalézt například v sekci V zde:
`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/doc/MFF/MA/ma2-2016-17.pdf`
a také v sekcích VII, IX zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ma215-cv.pdf`
a také v kapitole 10 zde:
`http://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html`
a také na webu kolegyně Kuncové zde:
`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie28.php`

Příklady zkouškové obtížnosti lze nalézt ve zkouškových písemkách z Matematiky III, které jsou vystaveny zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis`

———-VÝSLEDKY———-

1. a) 1 b) $\log 2$ c) $200\sqrt{2}$ d) $2-\frac{2}{e}$ e) $2-\frac{\pi}{2}$ f) 4π
2. a) π b) $5\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ c) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ e) $\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$ f) $\frac{1}{6}(\log 2-1+\pi/2)$

IV. KONVERGENCE NEWTONOVA INTEGRÁLU

1. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů

a) $\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}-1}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^1 \frac{\log(1-\cos x)}{\sqrt[3]{x(x-1)}}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_1^\infty \frac{e^x}{x^4}\,\mathrm{d}x$ e) $\int_8^\infty \frac{x+1}{(x+4)^3}\sin x\,\mathrm{d}x$

2. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 (\log x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_1^\infty \sin^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ e) $\int_0^1 \frac{1}{e^x-\cos x}\,\mathrm{d}x$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}\cos x}\,\mathrm{d}x$ g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x$ h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$ i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}\,\mathrm{d}x$ j) $\int_0^1 x^{-10x}\,\mathrm{d}x$ k) $\int_0^1 \frac{\log(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

l) $\int_0^\infty \pi - 2\arctan x\,\mathrm{d}x$ m) $\int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^2(1/x)}\,\mathrm{d}x$ n) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$

3. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů (příklady zkouškové obtížnosti)

a) $\int_1^\infty \sqrt[4]{e^{1/x^2}-e^{-1/x^2}}\,\frac{\log(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 \log(\operatorname{arctg} x)\frac{\pi/2-\arcsin x}{(e^{1-x}-1)^2}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^5 \frac{\log(x^2-10x+26)}{xe^{1/x}(5-x)^{5/2}}\,\mathrm{d}x$

d) $\int_1^\infty \frac{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^{3/4}}{\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}\operatorname{arctg}\left(3+\frac{\log x}{x}\right)\mathrm{d}x$ e) $\int_0^1 \frac{e^{2x^2}-e^{x^2}}{x^3\sqrt{\sin x}}\log(2+\operatorname{arctg} x)\,\mathrm{d}x$

Další příklady k procvičení lze nalézt například:

- ve skriptech Ilja Černý: Inteligentní kalkulus (kapitola 10, vyšetřování absolutní konvergence integrálů z Příkladů 10.101-10.145). Online zde: `http://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html`
- na webu kolegyně Kuncové zde: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie28.php`
- příklady ze zkouškových písemek Kalkulu 1 v semestru 2019-2020: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/doc/MFF/Kalkulus/kalkulus1_zkPis_web.pdf`

———-VÝSLEDKY———-

1. a) K (konverguje) b) K c) K d) D (diverguje) e) K
2. a) K b) K c) D d) K e) D f) D g) K h) D i) K j) K k) K l) D m) D n) K
3. a) K b) D c) K d) D e) D

V. RIEMANNŮV-STIELTJESŮV INTEGRÁL

1. Spočítejte hodnotu následujících Riemannových-Stieltjesových integrálů

a) $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x^3$ b) $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}e^x$ c) $\int_1^e (x+4) \, \mathrm{d}(e^x + \log x)$

d) $\int_0^3 e^x \, \mathrm{d}g(x)$, kde $g(x) := \begin{cases} 1 & \text{pokud } 0 \le x < 1 \\ 3 & \text{pokud } 1 \le x \le 2 \\ -1 & \text{pokud } 2 < x \le 3 \end{cases}$ e) $\int_1^3 x^2 \, \mathrm{d}g(x)$, kde $g(x) := \begin{cases} 1 & \text{pokud } x = 1 \\ 2 & \text{pokud } 1 < x < 2 \\ 3 & \text{pokud } 2 \le x \le 3 \end{cases}$

f) $\int_0^{100\pi} |\sin x| \, \mathrm{d}\sin(x)$ g) $\int_0^2 |x^2 - 1| \, \mathrm{d}([x] + x)$ (kde $[\cdot]$ značí dolní celou část)

h) $\int_1^4 f(x) \, \mathrm{d}g(x)$, kde $f(x) := \begin{cases} -1 & \text{pokud } x \in [1,2) \\ 2 & \text{pokud } x \in [2,3) \\ -2 & \text{pokud } x \in [3,4] \end{cases}$ a $g(x) := \begin{cases} x+1 & \text{pokud } x \in [1,2] \\ x^2 & \text{pokud } x \in (2,3] \\ x^3 & \text{pokud } x \in (3,4] \end{cases}$

i) $\int_{-3}^0 \big([x+2] - x\big) \, \mathrm{d}g(x)$, kde $g(x) = |e^x - e^{-2}|$ (a $[\cdot]$ značí dolní celou část)

———-VÝSLEDKY———-

1. a) $\frac{3}{5}$ b) $e - 2$ c) $(e+3)e^e + 3 - 3e$ d) $2e - 4e^2$ e) 5 f) 0 g) 5 h) -99 i) $3e^{-3} - 5e^{-2} - e^{-1} + 2$

VI. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

Najděte všechna maximální řešení následujících diferenciálních rovnic

1. a) $y' = 3x^2y^2$ b) $y' = \sqrt{y}e^{-x}$ c) $yy' = \frac{1-2x}{y}$ d) $xy' = -2 - y$, $y(1) = 1$ e) $y' = xe^x y$, $y(1) = 1$
f) $y' = x\sqrt[3]{1-y}$, $y(0) = 0$ g) $y' = \sin x \sin y$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$ h) $y' = \sqrt{4-y^2} \cdot x$, $y(0) = 1$

2. a) $xy' = -(x+y)$ b) $xyy' = y^2 - x^2$

3. a) $y' = \frac{y}{x} - 1$ b) $xy' + y = \log x + 1$ c) $y' + \frac{x+1}{x}y = 3xe^{-x}$, $y(1) = -\frac{1}{e}$

4. a) $y' = \frac{y \log y}{\sin x}$, $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{e}$ b) $y' + y\cos x = \sin 2x$, $y(0) = 3$ c) $xy' = y \log \frac{y}{x}$, $y(1) = e^3$
d) $y' = \frac{2x+y}{x}\log(\frac{2x+y}{x}) + \frac{y}{x}$ e) $y' + |x|y = x^5$, $y(0) = 0$ f) $y' = \frac{1}{y^3}\sqrt[3]{y^4-16} \cdot e^x$, $y(0) = -\sqrt[4]{16 + \left(\frac{4}{3}\right)^3}$

Další příklady k procvičení lze nalézt například:

- v online sbírce Tomáše Bárty zde: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/`
- na webu kolegyně Kuncové zde: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie28.php`

Příklady zkouškové obtížnosti lze nalézt ve zkouškových písemkách z Matematiky IV, které jsou vystaveny zde: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis`
případně se dají použít příklady ze zkouškových písemek Kalkulu 1 v semestru 2019-2020: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/doc/MFF/Kalkulus/kalkulus1_zkPis_web.pdf`

———-VÝSLEDKY———-

1. a) Stacionární řešení je $y_s(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Pro každé $c \in \mathbb{R}$ jsou maximálními řešeními funkce

$$y_c^1(x) = \frac{-1}{x^3+c},\ x \in (-\infty, -\sqrt[3]{c}) \quad \text{a} \quad y_c^2(x) = \frac{-1}{x^3+c},\ x \in (-\sqrt[3]{c}, \infty)$$

b) Stacionární řešení je $y_s(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Pro každé $c > 0$ je maximálním řešením funkce

$$y_c(x) = \begin{cases} 0 & x \in (\infty, -\log c] \\ \frac{1}{4}(c - e^{-x})^2 & x \in (-\log c, \infty) \end{cases}$$

c) Stacionární řešení nejsou. Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $y_c(x) = \sqrt[3]{3(x - x^2 + c)}$ maximální řešení definované na intervalech: pokud $c < -\frac{1}{4}$ pak $x \in \mathbb{R}$; pokud $c = -\frac{1}{4}$ pak $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$ nebo $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$; pokud $c > -\frac{1}{4}$ pak $x \in (-\infty, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + c})$ nebo $x \in (\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + c}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + c})$ nebo $x \in (\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + c}, \infty)$.

d) $y(x) = \frac{3}{x} - 2$, $x \in (0, \infty)$ e) $y(x) = \exp((x-1)e^x)$, $x \in \mathbb{R}$ f) $y(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{(1 - \frac{x^2}{3})^3} & x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}), \\ 1 & x \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty). \end{cases}$

g) $y(x) = 2\operatorname{arctg}\left(e^{1-\cos x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ h) $y(x) = \begin{cases} 2\sin(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{6}) & x \in (-\sqrt{\frac{2}{3}\pi}, \sqrt{\frac{2}{3}\pi}), \\ 2 & x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}\pi}] \cup [\sqrt{\frac{2}{3}\pi}, \infty). \end{cases}$

2. a) Pro každé $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jsou $y(x) = -\frac{x}{2} + \frac{K}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$ maximální řešení. Dalším řešením je $y(x) = -\frac{x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$
b) Pro každé $c \in \mathbb{R}$ jsou maximálními řešeními $y(x) = \pm x\sqrt{2c - \log x^2}$, $x \in (-e^c, 0)$ nebo $x \in (0, e^c)$

3. a) $y(x) = -x \log|x| + cx$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$ b) $y(x) = \log x + \frac{c}{x}$, $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$
c) $y(x) = (x^2 - \frac{2}{x})e^{-x}$, $x \in (0, \infty)$

4. a) $y(x) = e^{-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$, $x \in (0, \pi)$ b) $y(x) = 2(\sin x - 1) + 5e^{-\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$ c) $y(x) = xe^{1+2x}$, $x \in (0, \infty)$
d) $y(x) = -2x + x\exp(x \log 5)$, $x \in (0, \infty)$ e) $y(x) = \begin{cases} x^4 - 4x^2 + 8(1 - e^{-x^2/2}) & x \in [0, \infty), \\ -x^4 - 4x^2 + 8(e^{x^2/2} - 1) & x \in (-\infty, 0] \end{cases}$

f) $y(x) = \begin{cases} -2 & x \in (-\infty, \log(1/3)], \\ -\sqrt[4]{16 + \left(\frac{8}{3}(e^x - \frac{1}{3})\right)^{3/2}} & x \in [\log(1/3, \infty) \end{cases}$

VII. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE DRUHÉHO ŘÁDU

1. Uvažujte rovnici $y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$**.** a) Dokažte, že $\{e^x, e^{-x}\}$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice na intervalu $(-\infty, \infty)$ b) Nalezněte obecné řešení rovnice na intervalu $(-\infty, \infty)$ c) Nalezněte řešení splňující počáteční podmínku $y(0) = \frac{\pi}{2} + 3$, $y(1) = (e + \frac{1}{e}) \operatorname{arctg}(e) + e + \frac{2}{e}$.

2. Uvažujte rovnici $y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 3x$ **s počáteční podmínkou** $y(1) = 3$**,** $y'(1) = 10$**.** a) Dokažte, že $\{x^2, x^3\}$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice na intervalu $(0, \infty)$ b) Nalezněte řešení rovnice.

3. Uvažujte rovnici $y'' - \frac{2x+2}{x^2+2x}y' + \frac{2}{x^2+2x}y = x^2 + 2x$ **s počáteční podmínkou** $y(-1) = 0$**,** $y'(-1) = 4/3$**.** a) Dokažte, že $\{x^2, x+1\}$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice na intervalu $(-2, 0)$ b) Nalezněte řešení rovnice.

4. Nalezněte maximální řešení diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou.
(Hint: nejprve dokažte, že $\{\cos x, \sin x\}$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice)
a) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$ b) $y'' + y = \sin^2 x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ c) $y'' + y = |x|$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

5. Nalezněte obecné řešení rovnic
a) $y'' + 6y' + 10y = 0$ b) $y'' - 8y' + 7y = 0$ c) $y'' - 6y' + 9y = 8e^x$ d) $y'' - 2y' + 5y = \cos x$
e) $y'' - 2y' + 10y = \frac{9e^x}{\cos 3x}$ f) $y'' + 3y = \sin(\sqrt{3}x) + 3\cos(\sqrt{3}x)$

6. Nalezněte maximální řešení diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou
a) $y'' - 2y' = 8x + 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$ b) $y'' + y' = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$, $y(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$, $y'(0) = 0$
c) $y'' - 4y' + 4y = x^2 + 2e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Další příklady k procvičení lze nalézt například:

- v materiálech ke cvičení prof. Kalendy, viz. příklady ze sekce VI zde: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/archiv/s21314l.pdf/`
- na webu kolegyně Kuncové zde: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie28.php`
- v online sbírce Tomáše Bárty zde: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/`

———-VÝSLEDKY———-

1. a) b) $y(x) = (e^x + e^{-x}) \operatorname{arctg} e^x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ c) $y(x) = (e^x + e^{-x}) \operatorname{arctg} e^x + e^x + 2e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$
2. $y(x) = 3x^3 \log x + 2x^2 + x^3$, $x \in (0, \infty)$
3. $y(x) = \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$, $x \in (-2, 0)$
4. a) $y(x) = (\frac{\pi}{2} - x)\cos x + (1 + \log(\sin x))\sin x$, $x \in (0, \pi)$
b) $y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos(2x) + \frac{1}{3}\cos x + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ c) $y(x) = \begin{cases} |x| + \cos x + \sin x & x \geq 0, \\ |x| + \cos x + 3\sin x & x \leq 0. \end{cases}$
5. a) $y(x) = c_1 e^{-3x} \sin x + c_2 e^{-3x} \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ b) $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{7x}$, $x \in \mathbb{R}$
c) $y(x) = 2e^x + c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$ d) $y(x) = \frac{1}{5}\cos x - \frac{1}{10}\sin x + c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$
e) $y(x) = 3xe^x \sin 3x + \log|\cos 3x| e^x \cos 3x + c_1 e^x \sin 3x + c_2 e^x \cos 3x$, $x \in (\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3})$, $k \in \mathbb{Z}$
f) $y(x) = x(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\sqrt{3}x) - \frac{1}{6}\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)) + c_1 \sin(\sqrt{3}x) + c_2 \cos(\sqrt{3}x)$, $x \in \mathbb{R}$
6. a) $y(x) = -3 + 4e^{2x} - 2x^2 - 4x$, $x \in \mathbb{R}$ b) $y(x) = \operatorname{arctg}(e^x) - \frac{1}{2}\log(1 + e^{2x})e^{-x} - \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 2}{2}e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$
c) $y(x) = x^2 e^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8} - \frac{3}{8}e^{2x} + \frac{1}{4}xe^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$

VIII. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

1. Spočtěte parciální derivace funkcí všude, kde existují

a) e^{xy} b) $xy + yz + zx$ c) $|x| \cdot |y|$ d) $|y + \cos x|$ e) $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{\pi}{x^2+3xy+3y^2}} & (x,y) \neq 0, \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. Určete a nakreslete definiční obor funkce f a vyšetřete její parciální derivace
a) $f(x,y) = \arcsin \frac{|y|}{|x|+1}$ b) $f(x,y) = \sqrt{y^6 - x^3}$

3. Pomocí vět z přednášky dokažte, že funkce $f(x,y) = (xy + \sin(e^{x+y}))^2$ je spojitá.

4. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené ev. uzavřené a určete vnitřek.
a) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ b) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y > 0\}$ c) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + e^y > 17\}$
d) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : |x - y| = x - y\}$ e) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y > 0, x + y = 2, z \leq 0\}$

Další příklady k procvičení lze nalézt například:

- v sekci II zde: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/doc/FSV/m2-2015-16.pdf`
- v sekci IX zde: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/doc/MFF/MA/ma2-2016-17.pdf`
- na webu kolegyně Kuncové zde: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie30.php`

Příklady zkouškové obtížnosti lze čerpat ze zkouškových písemek z Matematiky II na FSV zde: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis`

———-VÝSLEDKY———-

1. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. b) $\frac{\partial f}{\partial x} = y + z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x + y$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x + y$ pro $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = |y| \operatorname{sgn} x$ pro $x \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = |x| \operatorname{sgn} y$ pro $y \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \neq 0$ neexistují. d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\operatorname{sgn}(y + \cos x) \cdot \sin x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \operatorname{sgn}(y + \cos x)$, pokud $y \neq -\cos x$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, -\cos x)$ neexistuje pro $x \in \mathbb{R}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(k\pi, (-1)^{k+1}) = 0$ pro $k \in \mathbb{Z}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, -\cos x)$ neexistuje pro $x \neq k\pi$. e) $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-\frac{\pi}{x^2+3xy+3y^2}} \cdot \frac{\pi(2x+3y)}{(x^2+3xy+3y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-\frac{\pi}{x^2+3xy+3y^2}} \cdot \frac{\pi(3x+6y)}{(x^2+3xy+3y^2)^2}$ pro $(x,y) \neq (0,0)$; v bodě $(0,0)$ jsou obě parciální derivace nulové.
2. viz. výsledky zkouškových písemek z Matematiky II na FSV zde: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis`. Konkrétněji, viz. varianta A z roku 2004/2005 a varianta D z roku 2010/2011.
4. a) Množina je uzavřená s prázdným vnitřkem b) Množina není uzavřená ani otevřená. Vnitřek je $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y > 0\}$ c) Množina není uzavřená, je otevřená d) Množina je uzavřená, není otevřená, vnitřek $\{[x,y] : x > y\}$ e) Ani uzavřená ani otevřená, vnitřek prázdný