1. Taylorův polynom

Definice. Nechť f je funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem řádu** n **funkce** f **v bodě** a.

Úmluva. V dalším textu budeme symbol tvaru $(x-a)^0$ chápat jako 1, a to i tehdy, jestliže $x = a$. Symbolem $f^{(0)}$ (tedy „nultou derivací“ funkce f) budeme rozumět samotnou funkci f.

Lemma 1.1. *Nechť* $n \in \mathbb{N}$*,* $a \in \mathbb{R}$*,* Q *je polynom,* $\operatorname{st} Q \leqslant n$ *a* $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$*. Pak* Q *je nulový polynom.*

Věta 1.2 (Charakterizace Taylorova polynomu)**.** *Nechť* $n \in \mathbb{N}$*,* $a \in \mathbb{R}$ *a nechť má funkce* f *v bodě* a *vlastní* n*-tou derivaci. Potom*

(a) Polynom $T_n^{f,a}(x)$ *je jediný polynom stupně nejvýše* n *splňující*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

(b) Polynom $P(x) = T_n^{f,a}(x)$ *je jediný polynom stupně nejvýše* n *takový, že pro každé* $i \in \{0 \dots n\}$ *platí* $f^{(i)}(a) = P^{(i)}(a)$*.*

Důsledek 1.3. *Nechť* $n \in \mathbb{N}$*,* $a \in \mathbb{R}$ *a nechť má funkce* f *v bodě* a *vlastní* n*-tou derivaci. Potom*

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + \omega(x)(x-a)^n,$$

kde $\lim_{x\to a} \omega(x) = 0$*.*

Věta 1.4 (Taylorův polynom základních funkcí)**.** *Nechť* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*, pak*

$$\begin{aligned}
T_n^{\exp,0}(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \\
T_{2n-1}^{\sin,0}(x) = T_{2n}^{\sin,0}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
T_{2n}^{\cos,0}(x) = T_{2n+1}^{\cos,0}(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
T_n^{\log(1+x),0}(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \\
\forall \alpha \in \mathbb{R}:\ T_n^{(1+x)^\alpha,0}(x) &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.
\end{aligned}$$

Věta 1.5 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** *Nechť* $n \in \mathbb{N}$ *a nechť* $a, x \in \mathbb{R}$*,* $a < x$*. Předpokládejme, že funkce* f *má v každém bodě intervalu* $[a, x]$ *vlastní derivaci řádu* $(n+1)$*. Pak existuje* $\xi \in (a, x)$ *takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Poznámka. Věta 1.5 platí i v případě $x < a$.

Důsledek 1.6. *Nechť* $n \in \mathbb{N}$*,* $a \in \mathbb{R}$*,* $r > 0$ *a nechť má funkce* f *v každém bodě intervalu* $(a-r, a+r)$ *vlastní derivaci řádu* $(n+1)$*. Pak*

$$\forall x \in (a-r, a+r): \quad |f(x) - T_n^{f,a}(x)| \leqslant \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{|y-a|<r} |f^{(n+1)}(y)|.$$

Důsledek 1.7. *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ a nechť má funkce f v každém bodě intervalu $(a-r, a+r)$ vlastní derivaci řádu n pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ať existuje konstanta $K > 0$ taková, že $\sup_{|y-a|<r} |f^{(n+1)}(y)| \leqslant K^{n+1}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak platí:*

(a) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro každé přirozené číslo $n \geqslant n_0$ platí

$$\forall x \in (a-r, a+r): \quad |f(x) - T_n^{f,a}(x)| \leqslant \varepsilon.$$

(b)

$$\forall x \in (a-r, a+r): \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce** f **o středu** a. Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o **Maclaurinově řadě**.

Věta 1.8 (Taylorovy řady elementárních funkcí)**.** *Platí (například) následující vztahy mezi elementárními funkcemi a jejich Taylorovými řadami (středem Taylorovy řady je ve všech případech bod $a = 0$):*

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{a})\forall x \in \mathbb{R}: \quad \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\\
&(\mathrm{b})\forall x \in \mathbb{R}: \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\\
&(\mathrm{c})\forall x \in \mathbb{R}: \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\\
&(\mathrm{d})\forall x \in (-1,1]: \quad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\\
&(\mathrm{e})\forall x \in (-1,1),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}: \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n}x^n,
\end{aligned}$$

2. Primitivní funkce

Značení. Nechť I je interval a $n \in \mathbb{N}$. Budeme používat značení

$$\mathcal{C}(I) := \{f : I \to \mathbb{R};\ f \text{ je spojitá na } I\};$$
$$\mathcal{C}^n(I) := \{f : I \to \mathbb{R};\ f \text{ má spojitou } n\text{-tou derivaci na } I\}.$$

Symbol $f \in \mathcal{C}([a,b])$ znamená, že interval $[a,b]$ je omezený a funkce f je na tomto intervalu spojitá.

2.1. Základní vlastnosti

Definice. Nechť funkce f je definovaná na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkcí k f na I*, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 2.1 (vlastnosti primitivní funkce)**.** *Nechť funkce F je primitivní funkce k funkci f na neprázdném otevřeném intervalu I. Pak:*

(a) F je spojitá na I.

(b) Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $F + c$ primitivní funkce k f na I.

(c) Pokud G je primitivní funkce k f na I, pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Věta 2.2 (vztah spojitosti a existence primitivní funkce)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval a $f \in \mathcal{C}(I)$. Pak f má na I primitivní funkci.*

Značení. Fakt, že F je primitivní funkce k f na neprázdném otevřeném intervalu I, značíme symbolem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} F(x), \quad x \in I.$$

Symbol $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ označuje množinu všech primitivních funkcí na k f na I.

Věta 2.3 (linearita primitivní funkce)**.** *Nechť funkce g, f mají na neprázdném otevřeném intervalu I primitivní funkci. Potom pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ je*

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 2.4 (integrace per partes)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval a $f, g \in \mathcal{C}(I)$. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí*

$$\int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I.$$

Věta 2.5 (první věta o substituci)**.** *Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b). Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a,b)$ je funkce, která má v každém bodě $t \in (\alpha, \beta)$ vlastní derivaci. Pak*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \overset{c}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Věta 2.6 (druhá věta o substituci)**.** *Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a,b)$ má v každém bodě nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a,b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a,b) a platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a,b).$$

Věta 2.7 (lepení)**.** *Nechť funkce f je spojitá na intervalu (a,b), $c \in (a,b)$ a F je funkce spojitá v bodě c, splňující $F'(x) = f(x)$ pro $x \in (a,b) \backslash \{c\}$. Pak F je primitivní k f na (a,b).*

2.2. Integrace racionálních funkcí

Definice. *Racionální funkcí* rozumíme podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule. Racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je definovaná na libovolné podmnožině $\mathbb{R}$, která neobsahuje žádný kořen polynomu Q.

Věta 2.8 (rozklad na parciální zlomky)**.** *Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že*

(i) $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$,

(ii) $Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1}\dots(x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}\dots(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$,

(iii) $a_n,\ x_1,\dots,x_k,\ \alpha_1,\dots,\alpha_l,\beta_1,\dots,\beta_l \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0,\ k,l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$,

(iv) $p_1,\dots,p_k,\ q_1,\dots,q_l \in \mathbb{N}$,

(v) žádný z mnohočlenů $x^2+\alpha_1 x+\beta_1, \dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ nemá reálný kořen,

(vi) žádné dva z polynomů $x-x_1,\ x-x_2,\dots,x-x_k, x^2+\alpha_1 x+\beta_1, \dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ nemají společný kořen.

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1,\dots,A_{p_1}^1,\ \dots, A_1^k,\dots,A_{p_k}^k,\ B_1^1,\ C_1^1,\dots,\ B_{q_1}^1,\ C_{q_1}^1,\dots,\ B_1^l,\ C_1^l,\dots,B_{q_l}^l,\ C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$
\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)^{p_1}} \\
& + \dots + \frac{A_1^k}{x-x_k} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{(x-x_k)^{p_k}} \\
& + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \dots \\
& + \frac{B_1^l x + C_1^l}{x^2+\alpha_l x+\beta_l} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}}
\end{aligned}
$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $Q(x) \neq 0$.

Poznámka (postup při integraci racionální funkce)**.** Nechť je zadána racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P a Q jsou polynomy, $Q \not\equiv 0$. Při výpočtu primitivní funkce $\int R(x)\,\mathrm{d}x$ na libovolném intervalu I, který neobsahuje žádný z kořenů polynomu Q, pak postupujeme podle následující osnovy:

1. krok: vyjádříme funkci $R(x)$ ve tvaru $R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$, kde $\operatorname{st} P_2 < \operatorname{st} Q$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) \neq 0$;
2. krok: provedeme rozklad funkce $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ na parciální zlomky podle Věty 2.8;
3. krok: integrujeme jednotlivé parciální zlomky podle následujícího návodu.

(a) Je-li

$$I = \int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x,$$

kde $A \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, pak

$$I \overset{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-n}\frac{A}{(x-a)^{n-1}}, & x \in (-\infty,a) \text{ nebo } x \in (a,\infty),\ \text{je-li } n > 1; \\ A \log|x-a|, & x \in (-\infty,a) \text{ nebo } x \in (a,\infty),\ \text{je-li } n = 1. \end{cases}$$

(b) Je-li

$$I = \int \frac{Bx+C}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x,$$

kde $q \in \mathbb{N}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ a $\beta - \frac{1}{4}\alpha^2 > 0$, pak nejprve vyjádříme I ve tvaru

$$I = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x + (C - \frac{B\alpha}{2})\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x.$$

Označíme-li

$$I_1 = \int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad I_2 = \int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x,$$

potom

$$I_1 \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{(1-q)(x^2+\alpha x+\beta)^{q-1}}, & x \in \mathbb{R},\ \text{je-li } q > 1, \\ \log(x^2+\alpha x+\beta), & x \in \mathbb{R},\ \text{je-li } q = 1. \end{cases}$$

Dále platí

$$I_2 = \int \frac{1}{((x+\frac{\alpha}{2})^2+\beta-\frac{\alpha^2}{4})^q}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(\beta-\frac{\alpha^2}{4})^q}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\right)^2+1\right]^q}\,\mathrm{d}x.$$

Pro výpočet posledního integrálu využijeme první větu o substituci. Položíme $\varphi(x) = \frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}$, takže $\varphi'(x) = \frac{2}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}$, a obdržíme

$$\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2+1\right]^q}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\int \frac{1}{(y^2+1)^q}\,dy.$$

Pro integrál $\int \frac{1}{(y^2+1)^q}\,dy$ je k dispozici rekurentní vzorec získaný integrací per partes:

$$\int \frac{1}{(y^2+1)^1}\,dy \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg}(y),$$

$$\int \frac{1}{(y^2+1)^{q+1}}\,dy = \frac{y}{2q(y^2+1)^q} + \frac{2q-1}{2q}\int \frac{1}{(y^2+1)^q}\,dy, \qquad q > 1.$$

2.3. Některé užitečné substituce

Poznámka (racionalisace integrálů s exponenciálou a s logaritmem)**.** Ať R je racionální funkce.

(a) Pro převod integrálů tvaru $\int R(e^{at})\,dt$ (kde $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$) na integraci racionální funkce lze využít substituci $\varphi(t) = e^{at}$.

(b) Pro převod integrálů tvaru $\int \frac{R(\log t)}{t}\,dt$ na integraci racionální funkce lze využít substituci $\varphi(t) = \log t$.

Značení. Ve zbytku této kapitoly budeme symbolem $R(x,y)$ značit *racionální funkci dvou proměnných*, tj. $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, kde

$$P(x,y) = \sum_{i,j=0}^{N_1} a_{ij}x^iy^j, \quad Q(x,y) = \sum_{i,j=0}^{N_2} b_{ij}x^iy^j.$$

Poznámka (racionalisace trigonometrických integrálů)**.** Pro převod integrálů tvaru $\int R(\sin t,\cos t)\,dt$ na integraci racionální funkce lze využít jedné z následujících substitucí:

(a) vždy lze užít substituci $\varphi(t) = \operatorname{tg}(\frac{t}{2})$, $t \in (-\pi,\pi)$,

(b) pokud $R(a,-b) = -R(a,b)$, lze užít substituci $\varphi(t) = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$,

(c) pokud $R(-a,b) = -R(a,b)$, pak lze užít substituci $\varphi(t) = \cos t$, $t \in \mathbb{R}$,

(d) pokud $R(-a,-b) = R(a,b)$, pak lze užít substituci $\varphi(t) = \operatorname{tg} t$, $t \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Poznámka (racionalisace integrálů s odmocninou)**.** Nechť $q \in \mathbb{N}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad \neq bc$. Potom pro převod integrálů tvaru $\int R(t,(\frac{at+b}{ct+d})^{\frac{1}{q}})\,\mathrm{d}t$, na integraci racionální funkce lze využít substituci $\varphi(t) = (\frac{at+b}{ct+d})^{\frac{1}{q}}$.

Poznámka (racionalisace integrálů tvaru $\int R(t,\sqrt{at^2+bt+c})\,\mathrm{d}t$)**.** Nechť $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Potom pro převod integrálů tvaru $\int R(t,\sqrt{at^2+bt+c})\,\mathrm{d}x$ na integraci racionální funkce rozlišujeme následující případy:

(a) Nechť má trojčlen $at^2 + bt + c$ dvojnásobný reálný kořen α a platí $at^2 + bt + c = a(t - \alpha)^2$. Má-li mít úloha smysl, musí platit $a > 0$. Pak ale

$$\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}|t - \alpha|.$$

(b) Nechť má trojčlen $at^2 + bt + c$ dva různé reálné kořeny α_1, α_2, $\alpha_1 < \alpha_2$ a platí $at^2 + bt + c = a(t - \alpha_1)(t - \alpha_2)$. Je-li $a > 0$, pak pro $t \in (-\infty, \alpha_1)$ a $t \in (\alpha_2, \infty)$ platí

$$\begin{aligned}\sqrt{at^2 + bt + c} &= \sqrt{a(t - \alpha_1)(t - \alpha_2)} \\ &= \sqrt{a}|t - \alpha_1|\sqrt{\frac{t - \alpha_2}{t - \alpha_1}}.\end{aligned}$$

Je-li $a < 0$, pak pro $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\begin{aligned}\sqrt{at^2 + bt + c} &= \sqrt{(-a)(t - \alpha_1)(\alpha_2 - t)} \\ &= \sqrt{-a}(t - \alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - t}{t - \alpha_1}}.\end{aligned}$$

V obou případech jsme tedy zadání převedli na úlohu nalézt primitivní funkci $\int R(t, (\frac{at+b}{ct+d})^{\frac{1}{q}})\,\mathrm{d}t$, jejíž řešení již známe. Povšimněme si, že v obou případech je splněna podmínka $ad \neq bc$, neboť v prvním případě platí $ad = -\alpha_1$ a $bc = -\alpha_2$, zatímco ve druhém případě platí $ad = \alpha_1$ a $bc = \alpha_2$.

(c) Polynom $at^2 + bt + c$ nemá reálné kořeny, nebo má dva různé reálné kořeny. Má-li mít úloha smysl, musí platit $a > 0$ a $c > 0$. V tomto případě lze užít takzvanou *Eulerovu substituci* $\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}t + x$.

Fakt 2.9. *Jsou–li $a > 0$, $b, c \in \mathbb{R}$ taková, že $b^2 - 4ac \neq 0$, pak funkce $\psi(x) := \sqrt{a}x + \sqrt{ax^2 + bx + c}$ definovaná na množině $\{x \in \mathbb{R};\ ax^2 + bx + c > 0\}$ je prostá na každém intervalu I svého definičního oboru a označíme–li $\varphi := (\psi|_I)^{-1}$, pak $\varphi(t) = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}$ má nenulovou vlastní derivaci na svém definičním oboru danou předpisem $\varphi'(t) = 2\frac{\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c}{(2\sqrt{a}t + b)^2}$.*

Z výše uvedeného faktu vyplývá, že Eulerovu substituci můžeme použít kdykoliv $a > 0$ a $b^2 - 4ac \neq 0$ a že v takovém případě jsou předpoklady 2. věty o substituci automaticky splněny (kde $x = \varphi(t)$ a $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$).

3. Newtonův, Riemannův a Riemannův-Stieltjesův integrál

3.1. Newtonův integrál

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Řekneme, že *Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje*, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci (označme ji F),
- existují limity $\lim_{x \to a_+} F(x)$ a $\lim_{x \to b_-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní);
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny $\mathbb{R}^*$.

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) pak rozumíme prvek

$$(N) \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x).$$

Pokud $a > b$, pak klademe $(N) \int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$. Pro $a \in \mathbb{R}^*$ definujeme $(N) \int_a^a f(x)\, dx = 0$. Jestliže $(N) \int_a^b f(x)\, dx$ existuje vlastní, pak říkáme, že integrál je *konvergentní*. Není-li integrál konvergentní, říkáme, že je *divergentní*.

Poznámka. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N) \int_a^b f(x)\, dx \begin{cases} \text{neexistuje}, \\ \text{existuje} \begin{cases} = \infty, \\ = -\infty, \\ \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{cases}$$

Značení. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Množinu všech funkcí $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, které mají na intervalu (a, b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a, b)$.

Úmluva. Je-li $(a, b) \subset D(f)$, pak symbol $f \in \mathcal{N}(a, b)$ znamená $f|_{(a,b)} \in \mathcal{N}(a, b)$.

Značení. Nechť funkce F je definovaná na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $\lim_{x \to a+} F(x)$ a $\lim_{x \to b-} F(x)$. Potom budeme značit $F(a+) = \lim_{x \to a+} F(x)$, $F(b-) = \lim_{x \to b-} F(x)$ a $[F]_a^b = F(b-) - F(a+)$, pokud má rozdíl smysl. Budeme občas psát $\int$ místo $(N) \int$.

Příklad.

$$(N) \int_0^1 x^\alpha\, dx = \begin{cases} [\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1, \infty) \quad \text{(konverguje)}, \\ [\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}]_0^1 = \infty, & \alpha \in (-\infty, -1) \quad \text{(diverguje)}, \\ [\log x]_0^1 = \infty, & \alpha = -1 \quad \text{(diverguje)}. \end{cases}$$

$$(N) \int_1^\infty x^\alpha\, dx = \begin{cases} [\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1, \infty) \quad \text{(diverguje)}, \\ [\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}]_1^\infty = \frac{-1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-\infty, -1) \quad \text{(konverguje)}, \\ [\log x]_1^\infty = \infty, & \alpha = -1 \quad \text{(diverguje)}. \end{cases}$$

Značení. Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme $\int_a^b f$ místo $(N) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$.

Věta 3.1 (vlastnosti Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$.*

(a) *Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ platí následující rovnosti, pokud pravé strany rovností mají smysl*

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

(b) *Jestliže $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$ a $f \leqslant g$, pak $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.*

(c) *Jestliže* $f \in \mathcal{N}(a,b) \cap \mathcal{C}((a,b))$, *pak* $\int_a^b |f|$ *existuje a* $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.

(d) *Nechť* $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a < b < c$. *Jestliže* $f \in \mathcal{N}(a,c)$, *pak* $f \in \mathcal{N}(a,b) \cap \mathcal{N}(b,c)$ *a platí*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

(e) *Nechť* $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a < b < c$. *Nechť* f *je spojitá v* b. *Pak* $f \in \mathcal{N}(a,b) \cap \mathcal{N}(b,c) \Leftrightarrow f \in \mathcal{N}(a,c)$.

(f) *Ať* $f \in \mathcal{N}(a,b)$. *Ať* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti z* (a,b) *splňující* $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. *Pak*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f.$$

(g) *Ať* $f \in \mathcal{N}(a,b)$ *a* $m \leqslant f(x) \leqslant M$ *pro* $x \in [a,b]$. *Pak*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant M(b-a).$$

(h) *Ať* $f \in \mathcal{N}(a,b)$, $c \in (a,b)$. *Pak* $(x \mapsto \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t)' = f(x)$ *pro* $x \in (c,b)$.

Důkaz. (a): lehké (vynecháme)
(b): ať $F \in \int f$ a $G \in \int g$. Pak máme

$$\int_a^b g = \int_a^b (g-f) + \int_a^b f = (G-F)(b-) - (G-F)(a+) + \int_a^b f,$$

zároveň $(G-F)' = g - f \geqslant 0$ a tedy $(G-F)(b-) - (G-F)(a+) \geqslant 0$.
(c): důkaz že $\int_a^b |f|$ existuje vynecháme. Důkaz nerovnosti plyne aplikací (b):

$$\left|\int_a^b f\right| = \max\left\{\int_a^b f, -\int_a^b f\right\} = \max\left\{\int_a^b f, \int_a^b -f\right\} \overset{(b)}{\leqslant} \int_a^b |f|.$$

(d): ať $F \in \int f$. Použijeme-li spojitost funkce F v bodě b, dostáváme

$$\int_a^b f + \int_b^c f = F(b-) - F(a+) + F(c-) - F(b+) = F(c-) - F(a+) = \int_a^b f.$$

(e): důkaz vynecháme.
(f): plyne z Heineho věty a ze spojitosti funkce F.
(g): plyne ihned z (b).
(h): ať $F \in \int f$. Pak pro každé $x \in (c,b)$ máme

$$(x \mapsto \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t)'(x) = (F(x-) - F(c+))'(x) = F'(x) = f(x).$$

□

Věta 3.2 (per partes pro Newtonův integrál)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, *a nechť* f *a* g *jsou funkce definované na* (a,b). *Nechť* F *je primitivní funkce k funkci* f *na* (a,b) *a* G *je primitivní funkce k funkci* g *na* (a,b). *Potom platí*

$$\int_a^b Fg = [FG]_a^b - \int_a^b fG,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Důkaz. důkaz vynecháme (analogický jako důkaz věty o per partes pro primitivní funkce). □

Věta 3.3 (substituce pro Newtonův integrál)**.** *Nechť* $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ *a* $\alpha < \beta$. *Nechť* f *je funkce definovaná na* (a,b) *a nechť* φ *je funkce definovaná na* (α,β). *Nechť* φ *má vlastní nenulovou derivaci na* (α,β) *a nechť platí* $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,b)$. *Potom*

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\,|\varphi'|,$$

má-li alespoň jedna strana smysl.

Důkaz. důkaz vynecháme (snadno plyne y 1. a 2. věty o substituci pro primitivní funkce). □

3.2. Riemannův integrál

Definice. Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme **dělením intervalu** $[a,b]$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \ldots, x_n$ nazýváme **dělícími body**. **Normou dělení** $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\{x_j - x_{j-1};\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Definice. Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a,b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a,b]$. Označme

$$\overline{S}(f,D) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\underline{S}(f,D) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\{\overline{S}(f,D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a,b]\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{\underline{S}(f,D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a,b]\}.$$

Definice. Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a,b]$, $a < b$, má **Riemannův integrál od** a **do** b, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Hodnota integrálu f od a do b je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $(R)\int_a^b f$. Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme $\int_a^b f$ místo $(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže $a > b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. V případě, že $a = b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Poznámka. Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a,b]$, která má Riemannův integrál od a do b. Pak hodnotu integrálu můžeme určit následujícím způsobem.

- pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme dělení $D_n = \{x_{n,k}\}_{k=1}^{k_n}$ tak, že $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$;
- pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $i \in \{1, \ldots k_n\}$ zvolíme $c_{n,i} \in [x_{n,i-1}, x_{n,i}]$;

Pak $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(c_{n,i})(x_{n,i} - x_{n,i-1}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál od a do b, značíme $\mathcal{R}([a,b])$. Pokud $[a,b] \subset D(f)$, potom symbol $f \in \mathcal{R}([a,b])$ znamená, že $f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}([a,b])$.

Příklady. (a) Existuje funkce, která je Riemannovsky integrovatelná, ale není Newtonovsky integrovatelná (například $|\operatorname{sgn} x|$ na intervalu $[-1,1]$).

(b) Existuje funkce, která je Newtonovsky integrovatelná, ale není Riemannovsky integrovatelná (například $\frac{1}{\sqrt{x}}$ na intervalu $(0,1)$ dodefinovaná libovolnou hodnotou v bodě 0).

Věta 3.4 (spojitost a riemannův integrál)**.** *Nechť $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Potom $f \in \mathcal{R}([a,b])$.*

Věta 3.5 (vztah Riemannova a Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť $f \in \mathcal{R}([a,b]) \cap \mathcal{N}(a,b)$. Potom*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Důsledek 3.6 (spojitost a existence Riemannova a Newtonova integrálu)**.** *Nechť $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Potom $f \in \mathcal{R}([a,b]) \cap \mathcal{N}(a,b)$ a*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx.$$

3.3. Konvergence Newtonova integrálu

Věta 3.7 (vztah spojitosti a konvergence Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{C}((a, b))$ je omezená. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Speciálně, pokud $f \in \mathcal{C}((a, b))$, $f(a+) \in \mathbb{R}$ a $f(b-) \in \mathbb{R}$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 3.8 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ pro každé $x \in [a, b)$. Nechť je $f \in \mathcal{C}([a, b))$ a $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Věta 3.9 (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť f, g jsou spojité nezáporné funkce na $[a, b)$. Jestliže $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Poznámka. Tvrzení Vět 3.8 a 3.9 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$.

Věta 3.10 (vztah absolutní konvergence a konvergence Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť je dána funkce $f \in \mathcal{C}((a, b))$ splňující $|f| \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Věta 3.11 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť $f, g \in \mathcal{C}([a, b))$ a g je monotónní na $[a, b)$. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na (a, b).*

(a) *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a g je omezená na $[a, b)$, potom $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.*

(b) *Jestliže F je omezená na (a, b) a $\lim_{x \to b-} g(x) = 0$, potom $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Poznámka. Tvrzení Věty 3.11 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$.

3.4. Aplikace určitého integrálu

Teorie integrálu se používá jako teoretický nástroj v matematice, ale také v geometrii, fyzice a v mnoha další vědách, kde se matematika aplikuje. Nějaké základní příkady jsou níže.

(a) **Integrální kritérium konvergence řad**

Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ a $f \in \mathcal{C}([n_0, +\infty))$ je nezáporná a nerostoucí. Pak $\int_{n_0}^{\infty} f(x) \,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ konverguje.

Příklad. Vyšetřete konvergenci řad $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$.
Řešení: první řada diverguje, druhá konverguje

(b) **Obsah podgrafu spojité funkce**

Nechť $f \in \mathcal{C}([a, b])$, $f \geqslant 0$. Pak obsah podgrafu f je roven číslu $\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$. Přesněji,

$$\text{obsah}\Big(\big\{(x, y);\ x \in [a, b], 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\}\Big) = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Příklad. Vypočtěte obsah podgrafu funkce $\sin x$, $x \in [0, \pi]$.
Řešení: 2

(c) **Obsah množiny vytvořené grafy funkcí**

Nechť $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$. Pak obsah množiny bodů ležících mezi grafy funkcí f a g je roven číslu $\int_a^b |g(x) - f(x)| \,\mathrm{d}x$. Přesněji,

$$\text{obsah}\Big(\big\{(x, y);\ x \in [a, b], f(x) \leqslant y \leqslant g(x) \text{ nebo } g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\big\}\Big) = \int_a^b |g(x) - f(x)| \,\mathrm{d}x.$$

Příklad. Vypočtěte obsah plochy ohraničené grafy funkcí $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sqrt{x}$ pro $x \in [0, 1]$
Řešení: $\frac{1}{3}$

(d) **Délka grafu funkce**

Nechť $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Pak

$$\textit{délka grafu funkce } f = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \,\mathrm{d}x.$$

Příklad. Spočtěte délku křivky $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}, x \in (-1, 1)$.
Řešení: 4

(e) **Změna polohy a ujetá vzdálenost**
Jestliže se bod pohybuje po přímce (např. po ose x) a značí-li $s(t)$ souřadnici bodu v čase t, je $s'(t)$ okamžitá rychlost $v(t)$ v čase t a $v'(t) = s''(t)$ okamžité zrychlení v čase t. Je-li dána závislost rychlosti na čase funkcí $v(t)$, není

$$\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t = s(b) - s(a)$$

ujetá vzdálenost, ale změna polohy pohybujícího se bodu. Ujetá délka cesty od okamžiku $t = a$ do okamžiku $t = b$ se spočte jako

$$\int_a^b |v(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

Příklad. Vypočítejte dráhu dešťové kapky za prvních 6 sekund, kde okamžitá rychlost (v metrech za sekundu) kapky je dána vzorcem $v(t) = g.t$, kde $g = 9.81$.
Řešení: 176.58 *metrů (*$176.58 = 9.81 \cdot 18$*)*

3.5. Riemannův-Stieltjesův integrál

Úmluva. V této sekci $[a, b]$ značí omezený interval, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ jsou omezené funkce.

Následující definice je přímočaým zobecněním Riemannova integrálu.

Definice. Nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a, b]$ a $\varphi : [a, b]$ je neklesající. Označme

$$\overline{S}(f, D, \varphi) = \sum_{j=1}^{n} M_j(\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})), \text{ kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$
$$\underline{S}(f, D, \varphi) = \sum_{j=1}^{n} m_j(\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})), \text{ kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \inf\{\overline{S}(f, D, \varphi);\ D \text{ je dělením intervalu } [a, b]\},$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \sup\{\underline{S}(f, D, \varphi);\ D \text{ je dělením intervalu } [a, b]\}.$$

Řekneme, že f má **Riemannův-Stieltjesův integrál od** a **do** b **vzhledem k funkci** φ, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$. Hodnota integrálu f od a do b vzhledem k funkci φ je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $(RS)\int_a^b f\,\mathrm{d}\varphi(x)$.

Tuto definici je ale možné dále zobecnit.

Definice. Nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a, b]$ a $c_j \in [x_{j-1}, x_j]$ pro $j = 1, \ldots, n$. Pak *Riemannova-Stieltjesova suma* $S(f, D, \varphi, (c_j)_{j=1}^n)$ je definována jako

$$S(f, D, \varphi, (c_j)_{j=1}^n) = \sum_{j=1}^{n} f(c_j)(\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})).$$

Většinou místo $S(f, D, \varphi, (c_j)_{j=1}^n)$ píšeme kratší zápis $S(f, D, \varphi)$.

Fakt 3.12. *Nechť φ je neklesající a $A \in \mathbb{R}$. Pak $(RS)\int_a^b f\,\mathrm{d}\varphi(x) = A$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje D dělení $[a, b]$ takové, že kdykoliv $D' \supset D$ je dělení $[a, b]$ a kdykoliv $S(f, D', \varphi)$ je Riemannova-Stieltjesova suma, pak $|S(f, D', \varphi) - A| < \varepsilon$.*

Tento fakt nás motivuje k následující definici.

Definice. Řekneme, že že f má **Riemannův-Stieltjesův integrál od a do b vzhledem k funkci** φ (kde φ není nutně neklesající), pokud existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje D dělení $[a, b]$ takové, že kdykoliv $D' \supset D$ je dělení $[a, b]$ a kdykoliv $S(f, D', \varphi)$ je Riemannova-Stieltjesova suma, pak $|S(f, D', \varphi) - A| < \varepsilon$.

V takovém případě je číslo A určeno jednoznačně, značíme jej $(RS) \int_a^b f \, \mathrm{d}\varphi(x)$ a říkáme, že $(RS) \int_a^b f \, \mathrm{d}\varphi(x)$ je **Riemannův-Stieltjesův integrál od a do b vzhledem k funkci** φ. Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme $\int_a^b f \, \mathrm{d}\varphi(x)$ místo $(RS) \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\varphi(x)$. Jestliže $a > b$, definujeme $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\varphi(x) = - \int_b^a f(x) \, \mathrm{d}\varphi(x)$. V případě, že $a = b$, definujeme $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\varphi(x) = 0$.

Definice. Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ je neklesající funkce. Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a, b]$, $a < b$, má **Riemannův-Stieltjesův integrál od a do b vzhledem k funkci** φ, pokud $\overline{\int_a^b} f(x) \, \mathrm{d}\varphi(x) = \underline{\int_a^b} f(x) \, \mathrm{d}\varphi(x)$. Hodnota integrálu f od a do b je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $(RS) \int_a^b f \, \mathrm{d}\varphi(x)$. Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme $\int_a^b f \, \mathrm{d}\varphi(x)$ místo $(RS) \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\varphi(x)$. Jestliže $a > b$, definujeme $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\varphi(x) = - \int_b^a f(x) \, \mathrm{d}\varphi(x)$. V případě, že $a = b$, definujeme $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\varphi(x) = 0$.

Definice. Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ je neklesající funkce. Množinu všech funkcí, které mají Riemannův-Stieltjesův integrál od a do b vzhledem k funkci φ, značíme $\mathcal{RS}_\varphi([a, b])$. Pokud $[a, b] \subset D(f)$, potom symbol $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$ znamená, že $f|_{[a,b]} \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$.

Věta 3.13 (bilinearita RS integrálu). *(i) Je–li $f, g \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$ a $c, d \in \mathbb{R}$, pak $cf + dg \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$ a platí*

$$\int_a^b (cf + dg)(x) \, \mathrm{d}\varphi(x) = c \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\varphi(x) + d \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}\varphi(x).$$

(ii) Jestliže $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce, $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b]) \cap \mathcal{RS}_\psi([a, b])$ a $c, d \in \mathbb{R}$, pak $f \in \mathcal{RS}_{c\varphi + d\psi}([a, b])$ a platí

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}(c\varphi + d\psi)(x) = c \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\varphi(x) + d \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\psi(x).$$

Věta 3.14 (aditivita RS integrálu vzhledem k intervalům). *Nechť $c \in (a, b)$. Pak $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$ právě tehdy, když $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, c]) \cap \mathcal{RS}_\varphi([c, b])$ a pokud $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$ pak platí*

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\varphi(x) = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}\varphi(x) + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}\varphi(x).$$

Věta 3.15 (spojitost a RS integrál). *Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ je neklesající funkce a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. Jestliže množina bodů nespojitosti funkce f je konečná a je–li v každém z těchto bodů funkce φ spojitá, pak $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$.*

Poznámka. Speciálně, je–li f spojitá až na konečně mnoho bodů, pak existuje Riemannův integrál funkce f. Jedná se tedy o zesílení a zobecnění věty 3.4.

Důsledek 3.16. *Nechť $f \in \mathcal{C}([a, b])$ a φ je monotónní. Pak $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$.*

Věta 3.17 (per partes pro RS integrál). *Funkce f má Riemannův-Stieltjesův integrál od a do b vzhledem k funkci φ právě tehdy, když funkce φ má Riemannův-Stieltjesův integrál od a do b vzhledem k funkci f a pokud oba integrály existují pak*

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\varphi(x) = [f(x)\varphi(x)]_a^b - \int_a^b \varphi(x) \, \mathrm{d}f(x),$$

kde symbol $[f(x)\varphi(x)]_a^b$ značí rozdíl $f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)$.

Důsledek 3.18. *Nechť f je monotónní a $\varphi \in \mathcal{C}([a, b])$. Pak $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$.*

Poznámka. Speciálně, je–li f monotónní, pak existuje Riemannův integrál funkce f. To je nový pro nás nový poznatek i pro Riemannův integrál.

Věta 3.19 (vztah Riemannova a Riemannova-Stieltjesova integrálu)**.** *Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Pak $f\varphi' \in \mathcal{R}([a,b])$, $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a,b])$ a platí*

$$(RS)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = (R)\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lemma 3.20. *Nechť $f \in \mathcal{C}([a,b])$ a φ je neklesající. Označme $m := \min\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$ a $M := \max\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$. Pak*

$$m(\varphi(b)-\varphi(a)) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) \leqslant M(\varphi(b)-\varphi(a)).$$

Věta 3.21 (integrál a funkce shodné skoro všude)**.** *Nechť $f \in \mathcal{C}([a,b])$ a $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ je funkce která je shodná s f až na konečný počet bodů. Pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad. Spočtěte následující Riemannův-Stieltjesův integrál ($[x]$ značí funkci celá část)

$$\int_0^3 x\,\mathrm{d}[x].$$

Řešení: Protože funkce $[x]$ je neklesající, integrál existuje a dle Věty 3.17 máme

$$\int_0^3 x\,\mathrm{d}[x] = [x[x]]_0^3 - \int_0^3 [x]\,\mathrm{d}x = 9 - \int_0^3 [x]\,\mathrm{d}x$$

S pomocí Věty 3.14 máme

$$\int_0^3 x\,\mathrm{d}[x] = 9 - \int_0^1 [x]\,\mathrm{d}x - \int_1^2 [x]\,\mathrm{d}x - \int_2^3 [x]\,\mathrm{d}x$$

a dle Věty 3.21 tak dostáváme

$$\int_0^3 x\,\mathrm{d}[x] = 9 - \int_0^1 0\,\mathrm{d}x - \int_1^2 1\,\mathrm{d}x - \int_2^3 2\,\mathrm{d}x = 6.$$

4. Diferenciální rovnice

Definice. *Diferenciální rovnicí* rozumíme rovnici tvaru

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0\,, \tag{4.1}$$

kde F je reálná funkce $n+2$ proměnných. *Řád diferenciální rovnice* (4.1) je nejvyšší řád derivace funkce y vyskytující se v (4.1).

Řešením diferenciální rovnice (4.1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (4.1) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F\Big(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)\Big) = 0.$$

Definice. Je-li funkce y řešením rovnice (4.1) na intervalu I a funkce $\tilde{y}$ řešením rovnice (4.1) na intervalu $\tilde{I}$, kde $I \subset \tilde{I}$, $I \neq \tilde{I}$ a $y(x) = \tilde{y}(x)$ pro všechna $x \in I$, pak říkáme, že řešení $\tilde{y}$ je *prodloužením řešení y* na interval $\tilde{I}$.

Řešení rovnice (4.1), které nemá prodloužení, nazýváme *maximálním řešením* rovnice (4.1). *Obecným řešením* rozumíme množinu všech maximálmích řešení. Maximálnímu řešení někdy také říkáme *partikulární řešení.*

Definice. Rovnice tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}),$$

kde f je reálná funkce $n+1$ proměnných, se nazývá *diferenciální rovnice (n-tého řádu) vyřešená vzhledem k nejvyšší derivaci.*

4.1. Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

Rovnice se separovanými proměnnými

Definice (Rovnice se separovanými proměnnými)**.** *Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými* je rovnice tvaru

$$y' = g(y)h(x). \tag{4.2}$$

Lemma 4.1 (Lemma o lepení řešení)**.** *Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$, nechť $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ a $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce, $x_0 \in (a, b)$ a $A \in (c, d)$. Nechť y_l je řešením diferenciální rovnice* (4.2) *na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ pro nějaké $\delta > 0$ a y_r je řešením diferenciální rovnice* (4.2) *na intervalu $(x_0, x_0 + \eta)$ pro nějaké $\eta > 0$. Nechť platí*

$$\lim_{x \to x_0^-} y_l(x) = A = \lim_{x \to x_0^+} y_r(x).$$

Pak funkce

$$y(x) := \begin{cases} y_l(x) & x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ A & x = x_0 \\ y_r(x) & x \in (x_0, x_0 + \eta) \end{cases}$$

je řešením rovnice (4.2) *na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \eta)$.*

Lemma 4.2. *Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$, nechť $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ a $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce, g je nenulová, $x_0 \in (a, b)$ a $y_0 \in (c, d)$. Označme*

$$H(x) := \int_{x_0}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in (a, b)$$

a

$$G(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad y \in (c, d).$$

Potom existuje právě jedno maximální řešení y rovnice (4.2) *splňující podmínku* $y(x_0) = y_0$. *Definičním intervalem I tohoto řešení je maximální interval ze všech intervalů tvaru* $(x_0 - \delta, x_0 + \eta)$, *které splňují* $(x_0 - \delta, x_0 + \eta) \subset (a, b)$ *a*

$$H(x) \in G((c, d)), \qquad x \in I.$$

Metoda řešení pro g, h spojité na svých definičních oborech.

(a) Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h. (Tím máme vymezeny maximální intervaly, na kterých můžeme hledat řešení.)

(b) Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ tzv. *singulárním* (též *stacionárním*) řešením rovnice (4.2).

(c) Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g nenulová.

(d) Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J ze 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je na J spojitá a nenulová. Budeme hledat řešení rovnice (4.2), jejichž definiční obor je obsažen v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li y takové řešení, pak pro každé $x \in D(y)$ platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k funkci h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J . Potom existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$G(y(x)) = H(x) + C$$

na definičním oboru řešení y, který nalezneme v následujícím kroku.

(e) Nyní zafixujeme C a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ H(x) + C \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů řešení musí mít tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + C),$$

kde G^{-1} značí funkci inverzní k funkci G. Ta existuje, neboť G je na intervalu J buď rostoucí nebo klesající.

(f) Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení rovnice (4.2) pomocí Lemmatu 4.1

Homogenní rovnice

Definice (Homogenní rovnice)**.** *Homogení diferenciální rovnice 1. řádu* se nazývá rovnice tvaru $y' = f(x, y)$, kde pro každé $\lambda \neq 0$ máme $f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$.

Metoda převodu homogenní rovnice na rovnici se separovanými proměnnými.

(a) Definujme pro $x \neq 0$ funkci $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Pak pro $x \neq 0$ máme

$$\begin{aligned} y(x) &= xz(x), \\ y'(x) &= xz'(x) + z(x). \end{aligned}$$

Rovnice tak přechází na $xz' + z = f(x, xz) = f(1, z)$, tj.

$$z' = \frac{1}{x}\left(f(1, z) - z\right),$$

což je rovnice se separovanými proměnnými.

(b) Vyřešíme rovnici se separovanými proměnnými na otevřených podintervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Pak položíme $y(x) = x \cdot z(x)$.

(c) Protože jsme na začátku vyloučili případ $x = 0$, je potřeba na závěr ověřit, zda nalezená řešení můžeme prodloužit do počátku.

Lineární rovnice 1. řádu

Definice (Lineární rovnice)**.** *Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu* rozumíme rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{4.3}$$

kde p, q jsou funkce definované na intervalu (a, b). Je-li $q = 0$, nazývá se rovnice *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní.*

Metoda řešení pro p, q spojité na svých definičních oborech.

(a) Obecné řešení homogenní rovnice je tvořeno funkcemi

$$y(x) = Ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b), K \in \mathbb{R},$$

kde P je primitivní funkce k p na intervalu (a, b).

(b) Obecné řešení rovnice (4.3) je tvořeno funkcemi

$$y(x) = y_p(x) + Ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),\ K \in \mathbb{R},$$

kde P je primitivní funkce k p na intervalu (a, b) a $y_p(x)$ je libovolné (tzv. "partikulární") maximální řešení rovnice (4.3).

Navíc, je–li $c(x)$ primitivní funkce k $q(x)e^{P(x)}$ na intervalu (a, b), pak funkce $y_p(x) = c(x)e^{-P(x)}$, $x \in (a, b)$ je maximální řešení rovnice (4.3).

(c) Maximální řešení rovnice (4.3) splňující *počáteční podmínku* $y(x_0) = y_0$ nalezneme vhodnou volbou konstanty $K \in \mathbb{R}$.

Přesněji, pokud je obecné řešení rovnice (4.3) tvaru $y(x) = y_p(x) + Ke^{-P(x)}$, pak pro volbu $K = (y_0 - y_p(x_0))e^{P(x_0)}$ dostáváme, že toto řešení vyhovuje podmínce $y(x_0) = y_0$.

Poznámka. Pro každé $x_0 \in (a, b)$ a každé $y_0 \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno maximální řešení rovnice (4.3), které splňuje podmínku $y(x_0) = y_0$. Toto řešení je navíc definováno na celém (a, b).

4.2. Aplikace diferenciálních rovnic prvního řádu

Příklad (Malthusův populační model)**.** Mějme nějakou izolovanou populaci. Nechť $p(t)$ je počet jedinců této populace v čase t. Slovem izolovaná míníme, že nedochází ke stěhování mezi naší populací a vnějším světem. Takovou populací mohou být například bakterie v Petriho misce. Předpokládejme, že přírůstek populace v krátkém čase je přímo úměrný velikosti populace (tj. počet bakterií, které se rozdělí, je přímo úměrný jejich celkovému počtu). To znamená, že existuje konstanta $a > 0$ taková, že přírůstek za krátký časový úsek h, tj. $p(t + h) - p(t)$, je přibližně roven $ap(t)h$. Poněvadž $p'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{p(t+h)-p(t)}{h}$, vede tato přibližná úvaha k diferenciální rovnici

$$p'(t) = a \cdot p(t).$$

Jedná se o homogenní lineární diferenciální rovnici, jejímž obecným řešením je $p(t) = Ke^{at}$, $t \in \mathbb{R}$ ($K \in \mathbb{R}$). Dosazením $t = 0$ vidíme, že $K = p(0)$, proto má obecné řešení tvar

$$p(t) = p(0)e^{at}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Příklad (Radioaktivní rozpad)**.** Mějme nějakou radioaktivní látku. Nechť $M(t)$ je množství radioaktivní látky v čase t. Předokládejme, že rychlost rozpadu libovolného radioaktivního prvku je přímo úměrná dosud nerozpadlému množství. To znamená, že existuje konstanta $a > 0$ taková, že úbytek za krátký časový úsek h, tj. $M(t + h) - M(t)$, je přibližně roven $-aM(t)h$. Pak podobně jako výše odvodíme, že funkce $t \mapsto M(t)$ by měla splňovat diferenciální rovnici

$$M'(t) = -aM(t),$$

jejíž obecné řešení má tvar

$$M(t) = M(0) \cdot e^{-at}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

K popisu radioaktivního štěpení se používá veličina poločas rozpadu $T = \frac{\log 2}{a}$, což je doba, za kterou se rozpadne polovina původního množství látky (tj. $M(T) = \frac{M(0)}{2}$).

Úloha: kolik procent původního množství radioaktivního uhlíku ^{14}C zůstane po 200 letech v zkoumaném biologickém materiálu? Poločas rozpadu radioaktivního izotopu uhlíku ^{14}C je 5730 let.
Odpověď: Po 200 letech zůstane

$$M(200) = M(0) \cdot \exp\Big(- \tfrac{\log 2}{5730} \cdot 200\Big) \approx M(0) \cdot 0.976,$$

tj. 97.6% matriálu.

Příklad (Lineární dietní model)**.** Hmotnost člověka závisí na mnoha věcech, ale v prvním přiblížení je funkcí přísunu energie v potravinách a její „spotřeby"(běh, učení atd.). Denní spotřeba energie je v průměru 35 kcal denně na každý kilogram váhy jedince. Předpokládejme tedy, že změna váhy $w(t)$ je přímo úměrná nedostatku/přebytku energie, tj. existuje konstanta $a > 0$, že přírustek/úbytek váhy za krátký časový úsek h, tj. $w(t + h) - w(h)$, je přibližně roven $a \cdot (c - 35w(t)) \cdot h$, kde c je množství kalorií, které přijmu za den. Předpokládejme, že každých 7000 kcal přebytku v celkovém přísunu energie vyvolá následné zvýšení váhy o 1 kg, tj. $a = \frac{1}{7000}$. Podobně jako výše odvodíme, že funkce $t \mapsto w(t)$ by měla splňovat diferenciální rovnici

$$w'(t) = \frac{c - 35w(t)}{7000}.$$

Řešení rovnice: jedná se o lineární diferenciální rovnici. Její obecné řešení se dá popsat jako

$$w(t) = \tfrac{c}{35} + (w(0) - \tfrac{c}{35})e^{-0.005t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(viz. zápisky k přednášce)
Úloha: Pan Tlustý váží 100 kg a chce omezit příjem kalorií na 2625 ($= \frac{3500}{75}$, tj. na 75%). Za jak dlouho dosáhne váhy 90 kg?
Řešení úlohy: Máme $w(t) = 75 + (100 - 75)e^{-0.005t} = 75 + 25e^{-0.005t}$ (kde t jsou dny). Tedy pokud $w(t) = 90$, pak

$$\begin{aligned} 90 &= 75 + 25e^{-0.005t} \\ e^{0.005t} &= \tfrac{15}{15} \\ 0.005t &= \log \tfrac{5}{3} \\ t &= 200 \log \tfrac{5}{3} \approx 102. \end{aligned}$$

Tedy podle našeho modelu pan Tlustý dosáhne váhy 90 kg za 102 dní.

Příklad (Logistický populační model)**.** Ukazuje se, že Malthusův model dobře popisuje skutečnost, pokud populace není příliš velká (či přesněji příliš hustá). V hustých populacích se objevuje další faktor – konkurence. Tato skutečnost se projeví zpomalením růstu. Proto zahrneme do rovnice další člen, který bude přímo úměrný možnému počtu střetů, tj. p^2. To vede k rovnici

$$p' = ap - bp^2,$$

kde a, b jsou kladné parametry, přičemž b bývá obvykle velmi malé vůči a.
Řešení rovnice: jedná se o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými. Její obecné řešení se dá popsat jako $p(t) = \frac{a}{b}$, $t \in \mathbb{R}$ nebo pro každé $K \in \mathbb{R}$ je

$$p(t) = \frac{aK}{e^{-at} + bK}$$

řešením definovaným na intervalu, kde $p(t) \geqslant 0$ (viz. zápisky k přednášce).

Pokud je řešení definováno pro $t = 0$ pak $p(0) = \frac{aK}{1+bK}$ a tedy po úpravě dostaneme $K = \frac{p(0)}{a - bp(0)}$ a

$$p(t) = \frac{ap(0)}{(a - bp(0))e^{-at} + bp(0)}.$$

4.3. Obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

Lineární rovnice 2. řádu

Definice (Lineární rovnice 2. řádu)**.** *Lineární diferenciální rovnicí druhého řádu* rozumíme rovnici tvaru

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \tag{4.4}$$

kde p, q, r jsou funkce spojité na intervalu (a, b).

Homogenní rovnicí příslušnou k rovnici (4.4) rozumíme rovnici

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{4.5}$$

Věta 4.3 (Existence řešení pro lineární rovnice 2. řádu)**.** *Nechť $t_0 \in (a, b)$ a $z_0, z_1 \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení y rovnice (4.4), které splňuje podmínky $y(t_0) = z_0$, $y'(t_0) = z_1$. Navíc, toto řešení je definováno na celém intervalu (a, b).*

Věta 4.4 (Struktura řešení lineární rovnice 2. řádu)**.**

(a) Obecné řešení rovnice (4.5) tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^2((a, b))$ dimenze 2.

(b) Nechť y_p je partikulární řešení rovnice (4.4). Pak obecné řešení rovnice (4.4) je

$$\{y_h + y_p;\ y_h \text{ je řešení rovnice (4.5) na intervalu } (a, b)\}.$$

Poznámky.

- Báze prostoru maximálních řešení rovnice (4.5) se nazývá *fundamentální systém řešení* rovnice (4.5).
- Jsou-li funkce y_1, y_2 lineárně nezávislá maximální řešení rovnice (4.5), pak již tvoří fundamentální systém.
- Abychom vyřešili nehomogenní rovnici (4.4), najdeme fundamentální systém y_1, y_2 pro rovnici (4.5) a jedno („partikulární“) řešení y_p rovnice (4.4). Obecné řešení rovnice (4.4) pak je $\{y_p + C_1y_1 + C_2y_2;\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$.

Věta 4.5 (Obecné řešení homogenní rovnice)**.** *Nechť y_1, y_2 jsou dvě řešení rovnice (4.5) na (a, b). Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(a) Funkce y_1, y_2 jsou lineárně nezávislé;

(b) Tzv. Wronského determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

je nenulový alespoň v jednom bodě intervalu (a, b) (pak je nenulový v každém bodě (a, b)).

Věta 4.6 (variace konstant)**.** *Nechť funkce y_1, y_2 tvoří fundamentální systém řešení rovnice (4.5). Pokud existují funkce c_1, c_2 mající na (a, b) vlastní derivaci a splňující soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} c_1'y_1 + c_2'y_2 &= 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' &= r \end{aligned}$$

na intervalu (a, b), pak funkce $y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$, $x \in (a, b)$ je řešením rovnice (4.4).

Lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

Definice (Lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty)**.** *Lineární diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty* rozumíme rovnici tvaru

$$y'' + py' + qy = r(x), \tag{4.6}$$

kde $p, q \in \mathbb{R}$ a r je funkce spojitá na intervalu (a, b).

Homogenní rovnicí příslušnou k rovnici (4.6) rozumíme rovnici

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{4.7}$$

Poznámka. Maximální řešení rovnice (4.7) jsou definována na celém $\mathbb{R}$.

Definice. *Charakteristickým polynomem* rovnice (4.7) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) := \lambda^2 + p\lambda + q.$$

Věta 4.7 (tvar fundamentálního systému)**.** *Nechťť $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ jsou kořeny charakteristického polynomu rovnice (4.7).*

- *Pokud jsou λ_1, λ_2 různé reálné kořeny, pak fundamentální systém řešení rovnice* (4.7) *tvoří funkce* $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ *a* $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$.
- *Pokud* $\lambda_1 = \lambda_2$, *pak fundamentální systém řešení rovnice* (4.7) *tvoří funkce* $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ *a* $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$.
- *Pokud jsou* $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ *různé komplexní kořeny, pak fundamentální systém řešení rovnice* (4.7) *tvoří funkce* $y_1(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ *a* $y_2(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$.

Věta 4.8 (speciální pravá strana)**.** *Nechť*

$$r(x) = e^{ax} \cdot (P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ *a* P, Q *jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice* (4.6) *ve tvaru*

$$y_p(x) = x^m e^{ax}(R(x)\sin bx + S(x)\cos bx), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde R, S *jsou polynomy stupně ne většího než* $\max\{\operatorname{st} P, \operatorname{st} Q\}$ *a* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *udává, jakou násobnost má číslo* $a + bi$ *jakožto kořen charakteristického polynomu příslušné homogenní rovnice.*

5. Funkce více proměnných

Definice. *Euklidovskou metrikou (vzdáleností) na* $\mathbb{R}^n$ rozumíme funkci $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ definovanou pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\rho(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Číslo $\rho(x,y)$ nazýváme *vzdáleností bodu* x *od bodu* y.

Lemma 5.1. *Definujme funkci* $\rho_{\max} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ *pro* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *předpisem* $\rho_{\max}(x,y) := \max\{|x_i - y_i|;\ i = 1, \dots, n\}$. *Pak pro* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *platí*

$$\rho_{\max}(x,y) \leqslant \rho(x,y) \leqslant \sqrt{n} \cdot \rho_{\max}(x,y).$$

Lemma 5.2 (základní vlastnosti Euklidovské metriky)**.** *Nechť* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *a* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Pak platí:*

(a) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(b) $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x,y)$;

(c) $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$;

(d) $\rho(x+z, y+z) = \rho(x,y)$

Definice. Nechť $x \in \mathbb{R}^n$ a $R > 0$. Pak množinu

$$B(x,R) := \{y \in \mathbb{R}^n;\ \rho(x,y) < R\}$$

nazýváme *otevřenou koulí o středu* x *a poloměru* R.

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $x \in \mathbb{R}^n$ je *vnitřním bodem množiny* A, jestliže existuje takové $R > 0$, že $B(x,R) \subset A$. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je *otevřená*, pokud každý bod $x \in A$ je jejím vniřním bodem. *Vnitřkem* množiny A rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny A a značíme jej $\operatorname{Int} A$.

Definice. O množině $I \subset \mathbb{R}^n$ řekneme, že to je (otevřený) *interval*, pokud existují (otevřené) intervaly $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ takové, že $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$.

Poznámky. (a) Z Lemmatu 5.1 plyne, že $A \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená právě tehdy, když pro každé $x \in A$ existuje takový interval I, že $x \in I$ a $I \subset A$.

(b) Otevřená koule je otevřená množina, otevřený interval je otevřená množina.

Věta 5.3 (vlastnosti otevřených množin)**.**

(a) Prázdná množina a celý prostor $\mathbb{R}^n$ *jsou otevřené v* $\mathbb{R}^n$.

(b) Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.

(c) Průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.

Definice. Nechť $\{x_k\}$ je posloupnost v $\mathbb{R}^n$ a $x \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\{x_k\}$ *konverguje* k x, jestliže $\lim_{k\to\infty} \rho(x_k, x) = 0$. Značíme $x_k \to x$, nebo také $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, případně $\lim x_k = x$. Prvek x nazýváme *limitou posloupnosti* $\{x_k\}$ v $\mathbb{R}^n$. *Konvergentní posloupností* rozumíme posloupnost, která má limitu v $\mathbb{R}^n$.

Lemma 5.4 (vlastnosti konvergence)**.** *Nechť* $\{x_k\}$ *je posloupnost prvků z* $\mathbb{R}^n$ *a* $x \in \mathbb{R}^n$. *Pak platí:*

(a) $\{x_k\}$ *má nejvýše jednu limitu;*

(b) $\{x_k\}$ *konverguje k* x *právě tehdy když konverguje po složkách, tj. pro každé* $i = 1, \dots, n$ *platí* $x_k(i) \to x(i)$.

Definice. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je *uzavřená*, pokud platí následující implikace:

$$\{x_k\} \subset A, \quad x_k \to x, \; x \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad x \in A.$$

Věta 5.5 (vztah otevřených a uzavřených množin)**.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$. Potom A je uzavřená právě tehdy, když $\mathbb{R}^n \setminus A$ je otevřená.*

Věta 5.6 (vlastnosti uzavřených množin)**.**

(a) Prázdná množina a celý prostor $\mathbb{R}^n$ jsou uzavřené v $\mathbb{R}^n$.

(b) Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

(c) Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.

Definice. Nechť f je funkce n proměnných a $x \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že *f je spojitá v bodě x*, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in B(x, \delta) \colon |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in A$. Řekneme, *že f je spojitá v bodě x vzhledem k A*, pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in B(x, \delta) \cap A \colon |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Řekneme, že *f je spojité na množině A*, jestliže je spojité v každém bodě $a \in A$ vzhledem k A a že *f je spojité*, jestliže je spojité na $\mathbb{R}^n$.

Lemma 5.7. *Pro každé $i = 1 \ldots, n$ je funkce $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ spojitá.*

Věta 5.8 (zachování spojitosti při aritmetických operacích)**.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Jestliže f a g jsou spojité v bodě x vzhledem k A, potom také funkce αf, $f + g$ a fg jsou spojité vzhledem k A. Pokud navíc funkce g je nenulová v bodě x, pak je spojitá i funkce f/g v bodě x vzhledem k A.*

Věta 5.9 (složení spojitých funkcí je spojitá funkce)**.** *Nechť $r, s \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^s$, $B \subset \mathbb{R}^r$ a $y \in A$. Necht' $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ jsou funkce definované na A, spojité v bodě y vzhledem k A a $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)) \in B$ pro každé $x \in A$. Nechť $f : B \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $(\varphi_1(y), \ldots, \varphi_r(y))$ vzhledem k B. Potom složená funkce $F : A \to \mathbb{R}$ daná předpisem*

$$F(x) := f((\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x))), \quad x \in A$$

je spojitá v y vzhledem k A.

Věta 5.10. *Nechť f je spojitá funkce na $\mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom platí:*

(a) Množina $\{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) > c\}$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$.

(b) Množina $\{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) < c\}$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$.

(c) Množina $\{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) \leqslant c\}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.

(d) Množina $\{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) \geqslant c\}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.

(e) Množina $\{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) = c\}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.

Definice. Řekneme, že funkce f o n proměnných má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in B(a, \delta) \setminus \{a\} \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Poznámky. (a) Každá funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu, píšeme $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

(b) f je spojitá v a, právě když $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

(c) Pro limity funkcí více promenných platí obdobné věty jako pro limity funkcí jedné proměnné (aritmetika, policajti, $\ldots$).

Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $1 \leqslant i \leqslant n$. Pak *parciální derivaci funkce f v bodě a podle i-té proměnné* definujeme jako limitu

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te^i)-f(a)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{t},\end{aligned}$$

pokud tato limita existuje vlastní. Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme **parciální derivaci funkce f podle i-té proměnné**, tj. funkci definovanou předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \colon x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$