CVIČENÍ 1

1. Teoretičtější příklady

a) Dokažte následující tvrzení (až je dokážete, je možné je používat jako "známá tvrzení")

Věta 1. Nechť P a Q jsou metrické prostory, $f, g\colon P \to Q$ jsou spojitá zobrazení a $M \subset P$ je hustá v P. Jestliže $f = g$ na M, pak $f = g$ na celém P.

Věta 2. Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak funkce $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ je 1-Lipschitzovská na P.

Věta 3. Součin $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ úplných metrických prostorů $X_1, \ldots, X_n$ je též úplný.

2. Konkrétnější příklady

a) Nechť je dána posloupnost $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ v $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ předpisem

$$f_n(k) := \frac{k+1}{k^2+2} + \frac{n+1}{n^2 k}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{c_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_\infty\}$. Zjistěte, zda f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou prvky Banachova prostoru X. Dále zjistěte zda je posloupnost f_n konvergentní v Banachových prostorech c_0 a ℓ_∞ (a pokud ano, určete její limitu).

b) Nechť je dána posloupnost funkcí $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ předpisem

$$f_n(x) := \frac{e^x - 1}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{n^2}{(n^2 - 1 + e^x)^2}, \quad n \in \mathbb{N}, x \in [0,1].$$

Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{C([0,1]), L_1([0,1]), L_2([0,1]), L_3([0,1]), L_\infty([0,1])\}$. Zjistěte, zda f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou prvky Banachova prostoru X. Pokud ano, zjistěte zda je posloupnost f_n konvergentní v Banachově prostoru X (a pokud ano, určete její limitu).

c) Nechť $Y \subset L_1([0,1])$ je množina daná předpisem

$$Y := \{f \in L_1([0,1])\colon \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}.$$

Určete, zda Y je uzavřený podprostor $L_1([0,1])$ a pokud ano, zda má nekonečnou dimenzi.

d) Nechť $Y \subset \ell_2$ je množina daná předpisem

$$Y := \{x \in \ell_2\colon \sum_{n=1}^{7} x_n = 0\}.$$

Určete, zda Y je uzavřený podprostor ℓ_2 a pokud ano, zda má nekonečnou dimenzi.

e) Nechť je dána posloupnost $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ v $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ předpisem

$$f_n(k) := \frac{e^n + k}{e^n \cdot k^3}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{c_0, \ell_1\}$. Zjistěte, zda f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou prvky Banachova prostoru X. Pokud ano, zjistěte zda je posloupnost f_n konvergentní v Banachově prostoru X (a pokud ano, určete její limitu).

f) Nechť je dána posloupnost reálných funkcí f_n, $n \in \mathbb{N}$ předpisem

$$f_n(x) := \frac{\log(nx)}{\sqrt{x}}, \quad n \in \mathbb{N}, x > 0.$$

Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{C([1,2]), L_1([0,1])\}$. Zjistěte, zda f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou prvky Banachova prostoru X. Pokud ano, zjistěte zda je posloupnost f_n konvergentní v Banachově prostoru X (a pokud ano, určete její limitu).

CVIČENÍ 2

1. Teoretičtější příklady, které by ale studenti opravdu měli ovládat

a) Nechť X je normovaný lineární prostor. Ukažte, že $B(x,r) = x + B(0,r)$ a $B(0,r) = rB(0,1)$.
b) Ukažte, že $B(x,r)$ a $U(x,r)$ jsou konvexní množiny.
c) Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $M \subset X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Ukažte, že $\overline{\alpha M} = \alpha \overline{M}$.
d) Ukažte, že v normovaném lineárním prostoru platí $\overline{U(x,r)} = B(x,r)$, $\operatorname{Int} B(x,r) = U(x,r)$ a $\partial U(x,r) = \partial B(x,r) = S(x,r)$. Nalezněte příklad metrického prostoru, kde tyto rovnosti neplatí.

2. Další teoretičtější příklady

a) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory ℓ_p a ℓ_q pro $p < q$? Jaký je jejich vztah k prostoru c_0?
b) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory $L_p([0,1])$ a $L_q([0,1])$ pro $p < q$?
c) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory $L_p(\mathbb{R})$ a $L_q(\mathbb{R})$ pro $p < q$?
d) Dokažte následující tvrzení (až jej dokážete, je možné je používat jako "známé tvrzení")

Věta 4. Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $M \subset P$ je hustá v P a $f : M \to Q$ je stejnoměrně spojité zobrazení. Pak existuje spojité rozšíření f na celé P. Toto rozšíření je určeno jednoznačně a je stejnoměrně spojité.

3. Ukažte, že $\varphi : X \to \mathbb{K}$ je spojitý lineární funkcionál, spočtěte jeho normu a zjistěte, zda φ své normy nabývá, jestliže

a) $X = \ell_1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n$; b) $X = c_0$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n$;
c) $X = C([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t)\,\mathrm{d}t$; d) $X = L_\infty([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t)\,\mathrm{d}t$;
e) $X = \ell_1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$; f) $X = \ell_1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}) x_{2n}$;
g) $X = C([0,1])$, $\varphi(f) = f(0) - f(1)$; h) $X = L_\infty([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$;
i) $X = \ell_2$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n$; j) $X = L_1([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$; ;
k) $X = \ell_p$ (kde $p \in (1, \infty)$), $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n$; l) $X = L_1([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t)\,\mathrm{d}t$.

VÝSLEDKY

3. a) $\|\varphi\| = 1$, normy se nabývá b) $\|\varphi\| = 1$, normy se nenabývá c) $\|\varphi\| = \frac{1}{4}$, normy se nenabývá d) $\|\varphi\| = \frac{1}{4}$, normy se nabývá e) $\|\varphi\| = 1$, normy se nabývá f) $\|\varphi\| = 1$, normy se nenabývá g) $\|\varphi\| = 2$, normy se nabývá h) $\|\varphi\| = \frac{1}{2}$, normy se nabývá i) $\|\varphi\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$, normy se nabývá j) $\|\varphi\| = 1$, normy se nenabývá k) $\|\varphi\| = \sqrt[q]{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}}$, normy se nabývá l) $\|\varphi\| = \frac{1}{2}$, normy se nenabývá

CVIČENÍ 3

1. Teoretičtější příklady

a) Dokažte následující tvrzení (až je dokážete, je možné je používat jako "známé tvrzení")

Věta 5. Nechť K je kompaktní metrický prostor. Pak prostor $C(K)$ je separabilní.

2. Ukažte, že $T : X \to Y$ je spojitý lineární operátor, spočtěte jeho normu a zjistěte, zda existuje $x \in S_X$ splňující $\|Tx\| = \|T\|$. Dále zkoumejte následující otázky:

- **Je operátor T prostý? Pokud ne, zjistěte jeho jádro.**
- **Je operátor T na?**
- **Je operátor T izometrie, případně izomorfismus? Pokud ano, popište jeho obor hodnot a spočtěte normu inverzního operátoru.**

(Jako vzorové se dají vzít řešené příklady [2, příklady 1.2.6 (a), (d)-(g)])

a) $X = Y = \ell_1$, $T((x_n)) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \ldots)$; b) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_2, 0, x_4, \ldots)$;
c) $X = Y = \ell_3$, $T((x_n)) = ((-1)^n \frac{x_n}{2^n})_{n=1}^{\infty}$; d) $X = Y = c_0$, $T((x_n)) = (\frac{2n^2+n+1}{n^2+5n} x_n)_{n=1}^{\infty}$;
e) $X = \ell_1$, $Y = \ell_\infty$, $T((x_n)) = (x_1 + \ldots + x_n)_{n=1}^{\infty}$;
f) $X = Y = C([0,1])$, $Tf = f + f(1) - f(0)$;
g) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = (t - \frac{1}{2})f(t)$;
h) $X = Y = C([-1,1])$, $Tf(t) = f(t^2)$;
i) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (2x_1 + 3x_2, x_1 - x_2, x_3, x_4, \ldots)$ (technicky náročnější).

3. Další vhodné příklady:

[1, příklady 1, 2, 3 (a)-(q) - některé z nich použity výše]
[2, příklady 1.2.6 (a)-(g), 1.2.11 (a)-(i)]

[1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-normy.pdf`
[2] sbírka řešených příkladů z webu:
`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/ufa/fa-priklady.pdf`

VÝSLEDKY

2. a) T je isometrie na b) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, není prostý a není na, $\ker T = \{x\colon x(2n) = 0,\ n \in \mathbb{N}\}$, není isomorfismus c) $\|T\| = \frac{1}{2}$, normy se nabývá, je prostý a není na, není isomorfismus d) $\|T\| = 2$, normy se nenabývá, T je isomorfismus na, $\|T^{-1}\| = \frac{3}{2}$ e) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T je prosté, není na, není isomorfismus f) $\|T\| = 3$, normy se nabývá, T je prostý a na, je izomorfismus, $\|T^{-1} = 3$. g) $\|T\| = \frac{1}{2}$, normy se nabývá, T je prostý a není na, není izomorfismus. h) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T není prostý a není na, $\ker T = \{f\colon f|_{[0,1]} \equiv 0\}$. i) $\|T\| = \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{2}}$, normy se nabývá, T je isomorfismus na, $\|T^{-1}\| = \frac{1}{5}\|T\|$.

CVIČENÍ 4

1. Teoretičtější příklady
a) Dokažte následující tvrzení (až je dokážete, je možné je používat jako "známé tvrzení")

Věta 6. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je lebesgueovsky měřitelná množina a $p \in [1, \infty)$. Pak $C_c(\Omega)$ je hustá podmnožina $L_p(\Omega, \lambda)$, kde

$$C_c(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} \colon f \text{ je spojitá a } \{f \neq 0\} \text{ je omezená}\}$$

Věta 7. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je lebesgueovsky měřitelná množina a $p \in [1, \infty)$. Pak prostor $L_p(\Omega, \lambda)$ je separabilní.

2. Ukažte, že $T : X \to Y$ je dobře definovaný spojitý lineární operátor
a) $X = L_1([0, 2])$, $Y = L_1([0, 2])$, $Tf(t) = \int_0^1 f(s)\mathrm{d}s + f(t)$
b) $X = C([0, 1])$, $Y = L_2([0, 1], \sin t \, \mathrm{d}\lambda)$, $Tf(t) = \sqrt{t} f(t)$
c) $X = C([0, 1])$, $Y = c_0$, $Tf = \big(f(\frac{1}{n}) - f(0)\big)_{n=1}^{\infty}$

3. Ukažte, že $T : X \to Y$ je spojitý lineární operátor, spočtěte jeho normu a zjistěte, zda existuje $x \in S_X$ splňující $\|Tx\| = \|T\|$. Dále zkoumejte následující otázky:

- **Je operátor T prostý? Pokud ne, zjistěte jeho jádro.**
- **Je operátor T na?**
- **Je operátor T izometrie, případně izomorfismus? Pokud ano, popište jeho obor hodnot a spočtěte normu inverzního operátoru.**

a) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$; b) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $Tf(t) = (t - \frac{1}{2})f(t)$.
c) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $Tf = \chi_{[0, \frac{1}{2}]} \cdot f$

4. Vyšetřete, pro která $k \in \mathbb{Z}$ je $T : X \to Y$ dobře definovaný spojitý lineární operátor
a) $L_3([0, 5])$, $Y = L_1([0, 5]^2)$, $Tf(x, y) = \frac{f(x)}{(xy)^k}$; b) $X = C([-\pi, \pi])$, $Y = \mathbb{R}$, $T(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\sin t)^k \, \mathrm{d}t$
c) $X = L_2([0, 1])$, $Y = \mathbb{R}$, $Tf = \int_0^1 x^k f(x) \, \mathrm{d}x$

5. Další vhodné příklady:
a) počítací viz. [1, příklady (u), (w)-(z) z oddílů 3 a 4] (některé použity výše)
b) [2, příklady ze sekce 1.2]

[1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-normy.pdf`
[2] sbírka řešených příkladů z webu:
`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/ufa/fa-priklady.pdf`

VÝSLEDKY

3. a) viz. [2, řešený příklad I.2.6(j)] b) $\|T\| = \frac{1}{2}$, normy se nabyde právě když $p = \infty$, je prosté a není na, není izomorfismus c) $\|T\| = 1$, normy se nabyde, T není prostý a není na, $\ker T = \{f \in L_p([0, 1]) \colon f|_{[0, \frac{1}{2}]} \equiv 0\}$, T není izomorfismus.
4. a) pro $k \leq 0$ b) pro $k \geq 0$ c) pro $k \geq 0$

Zadání zápočtové písemky z minulých let (slouží jako vzor toho, jak může zápočtová písemka vypadat):

Příklad 1:(6 bodů) Které z následujících funkcí $T : C([0,1]) \to L_2([0,1])$ jsou spojité a lineární? Své tvrzení dokažte.

1. $Tf = f$ pro $f \in C([0,1])$;
2. $Tf = f^3$ pro $f \in C([0,1])$;
3. $Tf(t) = f(t^3)$ pro $f \in C([0,1])$ a $t \in [0,1]$.

Příklad 2:(6 bodů) Nechť je dáno zobrazení $T : \ell_1 \to \ell_1$ definované předpisem

$$Tx = \Big(\int_0^1 x_n t^n \,\mathrm{d}t\Big)_{n=1}^{\infty}, \qquad x \in \ell_1.$$

1. Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor.
2. Určete normu operátoru T.
3. Zjistěte, zda je T izomorfismus do.

Příklad 3:(8 bodů) Nechť je dáno zobrazení $T : L_1([0,1]) \to L_1([0,1], t\,\mathrm{d}t)$ definované předpisem

$$Tf(t) = (t+2)f(t), \qquad f \in L_1([0,1]),\ t \in [0,1].$$

1. Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor.
2. Určete normu operátoru T.
3. Zjistěte, zda je T izomorfismus do.

VÝSLEDKY

Příklad 1: 1. ano, 2. ne, 3. ano
Příklad 2: $\|T\| = \frac{1}{2}$, není isomorfismus do
Příklad 3: $\|T\| = 3$, není isomorfismus do

CVIČENÍ 5

Na cvičení se psala zápočtová písemka. Její zadání je níže.

V příkladech níže uvažujte všechny prostory nad tělesem reálných čísel.

Příklad 1:(3 body) Které z následujících funkcí jsou dobře definované, lineární a spojité operátory z c_0 do ℓ_4? Své tvrzení dokažte.

1. $Tx = (x_1^2, 0, 0, 0, \dots)$ pro $x \in c_0$;
2. $Tx = (x_1 + x_2, 0, 0, 0, \dots)$ pro $x \in c_0$;
3. $Tx = x$ pro $x \in c_0$.

Příklad 2:(5 bodů) Nechť je dáno zobrazení $T : C([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$Tf = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \sin t \,\mathrm{d}t, \qquad f \in C([-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]).$$

1. Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor.
2. Určete normu operátoru T.
3. Zjistěte, zda T nabývá své normy.

Příklad 2:(6.5 bodů) Nechť je dáno zobrazení $T : L_1([1, \infty)) \to L_1([1, \infty), e^{-t^2}\,\mathrm{d}t)$ definované předpisem

$$Tf(t) = tf(t), \qquad f \in L_1([1, \infty)),\ t \geq 1.$$

1. Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor.
2. Zjistěte, zda je T prostý.
3. Zjistěte, zda je T na.
4. Zjistěte, zda je T izomorfismus do.

(Pozor: v zadání není stejná míra na definičním oboru a oboru hodnot zobrazení T.)
Příklad 2:(5.5 bodů) Nechť je dáno zobrazení $T : \ell_\infty \to \ell_\infty$ definované předpisem

$$Tx = (-x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_3, \dots), \qquad x \in \ell_\infty.$$

1. Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor.
2. Zjistěte, zda je T prostý.
3. Zjistěte, zda je T na.
4. Zjistěte, zda je T izomorfismus do.

CVIČENÍ 6

1. V následujícím příkladě je dán Hilbertův prostor H, jeho uzavřený podprostor Y a bod $x_0 \in H$. Najděte nějakou ortonormální bázi Y, napište vzorec pro ortogonální projekci na Y a najděte nejbližší bod v Y k bodu x_0.

a) $H = \mathbb{C}^4$, $Y = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^3 : \ x_2 = ix_1, \ x_4 = (1+i)x_3\}$, $x_0 = (1, i, 1, 1)$.
b) $H = L_2([0,1])$, Y podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2, $x_0(t) = e^t$.
c) $H = L_2((0,\infty), e^{-t}\,\mathrm{d}t)$, Y podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2, $x_0(t) = t^5$.
d) $H = \ell_2$, $Y = \operatorname{span}\{(2^{-n})_{n=1}^{\infty}, (3^{-n})_{n=1}^{\infty}\}$, $x_0 = e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$.

2. Další vhodné příklady:
e) [1, příklady 1-7] (některé použity výše)
f) [2, příklady ze sekce 1.4] (některé použity výše)

[1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-projekce.pdf`
[2] sbírka řešených příkladů z webu:
`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/ufa/fa-priklady.pdf`

VÝSLEDKY

1. a) ON báze Y je například $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0, 0), (0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1+i}{\sqrt{3}})\}$. OG projekce je $P(x_1, \ldots, x_4) = (\frac{1}{2}(x_1 - ix_2), \frac{1}{2}(ix_1 + x_2), \frac{1}{3}x_3 + \frac{1-i}{3}x_4, \frac{1+i}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4)$, nejbližší bod je $(1, i, \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i, 1 + \frac{1}{3}i)$.

b) ON báze Y je například $\{1, 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}, \sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{6})\}$, OG projekce má tvar $P(f)(x) = 180(x^2 - x + \frac{1}{6}) \cdot \int_0^1 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t - (180x^2 - 192x + 36) \cdot \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t + (30x^2 - 36x + 9) \cdot \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, nejbližší bod je $(210e - 570)x^2 + (588 - 216e)x + 39e - 105$

c) ON báze Y je například $\{1, x - 1, \frac{x^2}{2} - 2x + 1\}$, OG projekce je dána vzorcem $P(f)(x) = (\frac{x^2}{4} - x + \frac{1}{2}) \cdot \int_0^\infty t^2 f(t) e^{-t}\,\mathrm{d}t + (-x^2 + 5x - 3) \cdot \int_0^\infty tf(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t + (\frac{x^2}{2} - 3x + 3) \cdot \int_0^\infty f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$, nejbližší bod je $f(x) = 600x^2 - 1800x + 720$.

d) ON báze Y je například $\{\sqrt{3}(2^{-n})_{n=1}^{\infty}, \sqrt{200}(3^{-n} - \frac{3}{5}2^{-n})_{n=1}^{\infty}\}$, $Pe_1 = (\frac{20}{3}3^{-n} + \frac{9}{10}2^{-n})_{n=1}^{\infty}$

CVIČENÍ 7

1. Ukažte, že $T \in L(X,Y)$ a vyjádřete duální operátor $T^* \in L(Y^*, X^*)$ pomocí reprezentace duálů klasických prostorů. V případě, že X a Y jsou Hilbertovy, vyjádřete také hilbertovsky adjungovaný operátor $T^\star$.

a) $X = (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1, x_2) = (ix_1 - x_3, (1+i)x_2)$;
b) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1, ix_2, x_3, ix_4, \ldots)$;
c) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1 - x_2, x_2 - 2x_1, x_3, x_4, \ldots)$;
d) $X = Y = \ell_1$, $T((x_n)) = (\frac{2}{1}x_2 - \frac{1}{2}x_1, \frac{3}{2}x_4 - \frac{2}{3}x_3, \ldots, \frac{n+1}{n}x_{2n} - \frac{n}{n+1}x_{2n-1}, \ldots)$;
e) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $p \in [1, \infty)$, $Tf = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} \cdot f$;
f) $X = Y = L_2([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^1 \min(s,t) f(s)\,\mathrm{d}s$ (Pozor: zde je asi nejtěžší důkaz omezenosti operátoru T);
g) $X = L_1((0,\infty))$, $Y = L_1((0,\infty), e^{-t}\,\mathrm{d}t)$, $Tf(t) = f(2t)$;
h) $X = \ell_2$, $Y = L_2(1,\infty)$, $Tx = \sum_{n=1}^\infty x_n \chi_{(n,n+1)}$.

2. Další vhodné příklady:

i) [1, příklady 1 a 2 (a)-(m)] (některé použity výše)
j) [2, Příklad 1 (a)-(e) a Příklad 2 (a)-(e) ze sekce 4.1] (některé použity výše)

[1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-dualniop.pdf`
[2] sbírka řešených příkladů z webu:
`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/ufa/fa-priklady.pdf`

VÝSLEDKY

1. a) $T^*(y_1, y_2) = (iy_1, (1+i)y_2, -y_1)$, $T^\star(y_1, y_2) = (-iy_1, (1-i)y_2, -y_1)$
b) $T^*y = (y_1, iy_2, y_3, iy_4, \ldots)$, $T^\star y = (y_1, -iy_2, y_3, -iy_4, \ldots)$
c) $T^*y = T^\star y = (y_1 - 2y_2, y_2 - y_1, y_3, y_4, \ldots)$ d) $T^*y = (-\frac{1}{2}y_1, \frac{2}{1}y_2, -\frac{2}{3}y_3, \frac{3}{2}y_4, \ldots, -\frac{n+1}{n}y_{2n-1}, \frac{n+1}{n}y_{2n}, \ldots)$
e) $T^*g = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} \cdot g$ pro $g \in L_q([0,1])$ a pro $p = 2$ máme $T^\star g = T^* g$ f) $T = T^* = T^\star$
g) $T^*g(s) = \frac{1}{2}g(s/2)e^{-s/2}$ h) $T^*f = \left(\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n=1}^\infty$

CVIČENÍ 8

1. Ukažte, že $T \in L(X,Y)$ a vyjádřete duální operátor $T^* \in L(Y^*, X^*)$ pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.
a) $X = Y = C([-1,1])$, $Tf(t) = f(t^2)$; b) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = f + f(1) - f(0)$;
c) $X = C([0,1])$, $Y = L_2([0,1], \sin t \,\mathrm{d}\lambda)$, $Tf(t) = \sqrt{t} f(t)$; d) $X = Y = L_1([0,2])$, $Tf = \int_0^1 f(s) \mathrm{d}s + f(t)$;
e) $X = \ell_1$, $Y = C([0,1])$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$, $t \in [0,1]$;
f) $X = C([0,1])$, $Y = c_0$, $Tf = \big(f(\frac{1}{n}) - f(0)\big)_{n=1}^{\infty}$; g) $X = \ell_1$, $Y = L_3([0,1])$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$, $t \in [0,1]$;
h) $T : L_2([1,\infty)) \to c_0$, $Tf = \left(\int_1^{\infty} \frac{f(t)}{t^n} \,\mathrm{d}t \right)_{n=1}^{\infty}$ (Pozor: nejprve je třeba dokázat, že $Tf \in c_0$ a že je spojitý)
i) $X = L_1([0,1])$, $Y = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $Tf = \big(\int_0^1 t f(t) \,\mathrm{d}t, \int_0^1 \cos(t) f(t) \,\mathrm{d}t \big)$

VÝSLEDKY

1. a) $T^*\mu = \varphi_{\#}\mu$, kde $\varphi(t) = t^2$ b) $T^*\mu = \mu + \mu([0,1])(\delta_1 - \delta_0)$ c) $T^* f = \sqrt{t} f(t) \sin t \,\mathrm{d}\lambda$ d) $T^* g = g + \chi_{[0,1]} \int_0^2 g(s) \,\mathrm{d}s$ e) $T^*\mu = \left(\int_0^1 t^i d\mu(t) \right)_{i=1}^{\infty}$ f) $T^* x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n (\delta_{1/n} - \delta_0)$ (sumou se rozumí absolutně konvergentní řada v prostoru $M([0,1])$) g) $T^* g = \left(\int_0^1 t^i g(t) \, d\lambda(t) \right)_{i=1}^{\infty}$ h) $T^* x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{t^n}$ (sumou se rozumí absolutně konvergentní řada v prostoru L_2) i) $T^* x(t) = x_1 t + x_2 \cos t$

Další vhodné příklady:

- příklady ze zkouškových písemek na hledání adjungovaného operátoru, dostupné na webu prof. Spurného, často včetně řešení (`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/ufa.php` a `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/fa-leto.php`)
- vznikající skripta řešených příkladů (viz. `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/ufa/fa-priklady.pdf`)
- příklady ze zkouškových písemek z VPFA (viz. `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/doc/MFF/VPFA/2021_22/VPFA_zkPisWeb.pdf`)

CVIČENÍ 9

1. Určete, zda je operátor $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ kompaktní
a) $X = (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1,x_2) = (x_1+x_2, x_1-x_2, 2x_1+x_2)$;
b) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots)$; c) $X = Y = c_0$, $T((x_n)) = (\frac{1}{n}x_n)_{n=1}^{\infty}$;
d) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty)$, $Tf(t) = tf(t)$; e) $X = Y = C([0,1])$, $T(f)(t) = \int_0^1 f(s)\sqrt{1+t+s^2}\,\mathrm{d}s$;
f) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1 - x_2, 2x_2 - x_1, x_3, x_4, \ldots)$; g) $X = \ell_{3/2}$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = \left(\frac{x_1+\ldots+x_{2n}}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$;
h) $X = Y = C([0,1])$, $T(f) = f - f(0) + 5f(1)$; i) $X = C([0,1])$, $Y = c_0$, $Tf = \left(f(\frac{1}{n}) - f(0)\right)_{n=1}^{\infty}$;
j) $X = Y = L_1([0,2])$, $Tf(t) = \int_0^1 f(s)\mathrm{d}s + f(t)$; k) $X = c_0$, $Y = C([0,2\pi])$, $Tx(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}\cos(nt)$;
l) $X = Y = L_2([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^1 \min(s,t)f(s)\,\mathrm{d}s$
(*Hint: Uvažujte operátory $A : L_2([0,1]) \to C([0,1])$ a $B : C([0,1]) \to L_2([0,1])$, kde A je dáno stejným předpisem jako T a B je "identita" (přesněji: $Af(t) = \int_0^1 \min(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s$ a $Bf = [f]$). Ukažte, že A a B jsou lineární, spojité a s pomocí Arzela-Ascoliho věty ukažte, že A je kompaktní. Na závěr použijte identitu $T = B \circ A$.*)

VÝSLEDKY

1. a) ano (aplikujeme metodu (ii)); b) ne (aplikujeme metodu (i)); c) ano (aplikujeme metodu (ii)); d) ne (aplikujeme metodu (iii)); e) ano (aplikujeme metodu (iv)); f) ne (aplikujeme metodu (i)); g) ano (aplikujeme metodu (ii)); h) ne (aplikujeme metodu (iii)); i) ne (aplikujeme metodu (i)); j) ne (aplikujeme metodu (iii)); k) ano (aplikujeme metodu (ii));

Další vhodné příklady:

- příklady ze zkouškových písemek na vyšetření, zda je operátor kompaktní: dostupné na webu prof. Spurného, často včetně řešení (`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/ufa.php` a `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/fa-leto.php`), příklady ze zkouškových písemek z VPFA (viz. `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/doc/MFF/VPFA/2021_22/VPFA_zkPisWeb.pdf`)
- vznikající skripta řešených příkladů (viz. `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/ufa/fa-priklady.pdf`)
- materiály prof. Kalendy (viz. `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-kompakt.pdf`)

CVIČENÍ 10

Na cvičení se psala zápočtová písemka. Její zadání je níže.

Příklad 1: Je dán Hilbertův prostor $H = \mathbb{C}^3$, jeho uzavřený podprostor

$$Y := \{(x_1, x_2, x_3) \colon 2x_1 + ix_2 - ix_3 = 0\}$$

a bod $x_0 = (1, 1, i)$. Najděte nějakou ortonormální bázi Y, napište vzorec pro ortogonální projekci na Y a najděte nejbližší bod v Y k bodu x_0.

V příkladech níže uvažujte všechny prostory nad tělesem reálných čísel.

Příklad 2: Nechť je dáno $T : C([0, 1]) \to \ell_1$ předpisem

$$Tf = \Big(\frac{f(\frac{1}{n})}{2^n}\Big)_{n=1}^{\infty}, \qquad f \in C([0, 1]).$$

Dokažte, že T je dobře definovaný spojitý operátor, zjistěte, zda je T kompaktní a vyjádřete duální operátor T^* pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.

Příklad 3: Nechť je dáno $T : L_3([0, \pi]) \to L_3([0, \pi])$ předpisem

$$Tf(x) = f(x) + \sin x\Big(\int_0^{\pi} f(t) \cos t \, dt\Big) + \cos x\Big(\int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt\Big), \qquad f \in L_3([0, \pi]).$$

Dokažte, že T je dobře definovaný spojitý operátor, zjistěte, zda je T kompaktní a vyjádřete duální operátor T^* pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.

CVIČENÍ 11

1. Pro následující operátory ukažte že $T \in \mathcal{L}(X)$ a určete $\sigma(T)$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

a) $X = \ell_1$, $T(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \ldots, -x_{2n}, x_{2n-1}, \ldots)$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem komplexních čísel)
b) $X = C([0,1])$, $Tf(t) = f(t) + f(1) - f(0)$; c) $X = L_1([0,1])$, $Tf(t) = 2f(t) + t\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + t^2 \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$;
d) $X = c_0$, $T(x) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, x_3, \frac{1}{4}x_4, x_5, \frac{1}{6}x_6, \ldots)$; e) $X = L_3([0,1])$, $Tf(t) = t^2 f(t)$;
f) $X = \ell_2$, $T((x_n)) = (-x_2, x_1, -\frac{1}{2}x_4, x_3, -\frac{1}{3}x_6, x_5, \ldots)$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem komplexních čísel)
g) $X = C([0,1])$, $Tf(t) = f(t) + tf(1)$; h) $X = L_1((0,\infty), e^{-t}\,\mathrm{d}t)$, $Tf(x) = f(x) + x^2\int_0^\infty f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$;
i) $X = \ell_1$, $Tx = (\frac{n+1}{n}x_n)_{n=1}^\infty$; j) $X = C([0,1])$, $T(f)(t) = tf(t)$;
k) $X = L_2([0,1])$, $T(f)(t) = \chi_{[0,1/2]}(t) \cdot f(t)$;
l) $X = C([-1,1])$, $T(f)(t) = f(|t|)$;

Výsledky:

a) $\sigma_p(T) = \{\pm i\} = \sigma(T)$ b) $\sigma_p(T) = \{1\} = \sigma(T)$ c) $\sigma_p(T) = \{2, \frac{57+\sqrt{79}}{24}, \frac{57-\sqrt{79}}{24}\} = \sigma(T)$
d) $\sigma_p(T) = \{\frac{1}{2n} \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$ e) $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = [0,1]$
f) $\sigma_p(T) = \{\pm\frac{i}{\sqrt{n}} \colon n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$ g) $\sigma_p(T) = \{1,2\} = \sigma(T)$ h) $\sigma_p(T) = \{1,3\} = \sigma(T)$
i) $\sigma_p(T) = \{\frac{n+1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{1\}$ j) $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = [0,1]$ k) $\sigma_p(T) = \{0,1\} = \sigma(T)$
l) $\sigma_p(T) = \{0,1\} = \sigma(T)$